Automorphisms of a polynomial ring which admit reductions of type I

黒田 茂（首都大学東京大学院理工学研究科）

1　序

n を自然数，$k[\mathbf{x}] = k[x_1, \ldots, x_n]$ を標数零の体 k 上の n 変数多項式環とする．$k[\mathbf{x}]$ の k 上の自己準同型 F は，$f_i = F(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ とおくことで $k[\mathbf{x}]$ の元の n 項組 $(f_1, \ldots, f_n)$ と同一視できる．このとき，F が自己同型であることと $k[f_1, \ldots, f_n] = k[\mathbf{x}]$ が成り立つことは同値である．本稿では，$k[\mathbf{x}]$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ やその元について考察する．

F が $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元ならば，f_i $(i = 1, \ldots, n)$ は定数でない．よって，$\deg F := \sum_{i=1}^n \deg f_i$ は常に n 以上になる．ここで，各 $f \in k[\mathbf{x}]$ に対し $\deg f$ は f の全次数を表す．$\deg F = n$ であるとき，F をアフィン自己同型 (affine automorphism) と呼ぶ．ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ と $\phi \in k[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$ に対し $f_i = x_i + \phi$, $f_j = x_j$ $(j \neq i)$ となるとき，F を基本自己同型 (elementary automorphism) と呼ぶ．$\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元 G は，$\deg(G \circ F) < \deg G$ を満たす基本自己同型 F が存在するとき，基本簡約可能 (elementary reducible, admits an elementary reduction) であるという．すなわち，$G = (g_1, \ldots, g_n)$ が基本簡約可能であるとは，$\deg(g_i + h) < \deg g_i$ を満たす $i \in \{1, \ldots, n\}$ と $h \in k[g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n]$ が存在するときにいう．このとき，$G \circ F$ を F の基本簡約 (elementary reduction) と呼ぶ．

アフィン自己同型と基本自己同型が生成する $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の部分群を $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ とおく．このとき, $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] = \mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ が成り立つかどうかが大きな問題となる．容易に分かるように, $n = 1$ ならば $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の任意の元はアフィン自己同型である．よって，$\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] = \mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ が成り立つ．1942 年に Jung [2] は，$n = 2$ のとき $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}] = \mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ が成り立つことを示した．この結果は次の命題の帰結である．

命題 1.1 $n=2$ とする．$F=(f_1,f_2)$ が $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元ならば，$\deg f_1$ が $\deg f_2$ を割り切るか $\deg f_2$ が $\deg f_1$ を割り切る．

実際，命題 1.1 より，各 $F\in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ に対し，F はアフィン自己同型でなければ基本簡約可能であることが従う．すると，適当な基本自己同型 $E_1,\ldots,E_r\in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ により

$$\deg F > \deg(F\circ E_1) > \cdots > \deg(F\circ E_1\circ E_2\circ\cdots\circ E_r)=2$$

のようにできる．このとき，$F\circ E_1\circ E_2\circ\cdots\circ E_r$ はアフィン自己同型である．ゆえに，F は $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属す．なお，本稿では k の標数は零と仮定しているが，van der Kulk [3] より k の標数が零でなくても $n=2$ ならば $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]=\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ は成り立つ．

$n\geq 3$ の場合は $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の構造は格段に難しくなる．$n=3$ のとき $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ が $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ と異なることを立証すべく，永田 [7] は $k[\mathbf{x}]$ の自己同型

$$F=(x_1-2(x_1x_3+x_2^2)x_2-(x_1x_3+x_2^2)^2x_3,\, x_2+(x_1x_3+x_2^2)x_3,\, x_3) \tag{1.1}$$

を構成し，F は $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属さないと予想した．F が $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属すことは，逆写像が

$$F^{-1}=(x_1+2(x_1x_3+x_2^2)x_2-(x_1x_3+x_2^2)^2x_3,\, x_2-(x_1x_3+x_2^2)x_3,\, x_3)$$

で与えられることより分かる．また，F が基本簡約可能でないことを確かめるのも難しくない．だが，F が $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属すかどうか判定するのは非常に難しく，この予想は広く知られていたにもかかわらず長い間解決しなかった．しかし，2003 年に Shestakov-Umirbaev [9], [10] はついに予想が正しいことを証明した．それにより，$n=3$ のとき $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]\neq \mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ であることが判明した．けれども，これをもって $n\geq 4$ の場合も $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]\neq \mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ であると結論することはできない．例えば，自己同型 (1.1) の拡張

$$\tilde{F}=(x_1-2(x_1x_3+x_2^2)x_2-(x_1x_3+x_2^2)^2x_3,\, x_2+(x_1x_3+x_2^2)x_3,\, x_3,\ldots,x_n)$$

は，$n\geq 4$ ならば $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属す (cf. [8])．実際，基本自己同型

$$F_1=(x_1+2x_2x_4-x_3x_4^2, x_2,\ldots,x_n),\quad F_2=(x_1,x_2-x_3x_4,x_3,\ldots,x_n)$$
$$F_3=(x_1,x_2,x_3,x_4+x_1x_3+x_2^2,x_5,\ldots,x_n),\quad F_4=(x_1,x_2+x_3x_4,x_3,\ldots,x_n)$$
$$F_5=(x_1-2x_2x_4-x_3x_4^2,x_2,\ldots,x_n),\quad F_6=(x_1,x_2,x_3,x_4-x_1x_3-x_2^2,x_5,\ldots,x_n)$$

に対し $\tilde{F}=F_1\circ F_2\circ F_3\circ F_4\circ F_5\circ F_6$ が成り立つ．現時点では，$n\geq 4$ の場合に $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]=\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ が成り立つかどうか分かっていない．

Shestakov-Umirbaev [10] は，永田の自己同型 (1.1) が $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属さないことを次のように示した．まず，$n=3$ の場合に $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元に対し，基本簡約の他に I 型，II 型，

III 型，IV 型と呼ばれる 4 種類の簡約の概念を新たに定義した．そして，アフィン自己同型でない $\mathrm{T}_k\,k[\mathbf{x}]$ の元は，基本簡約可能であるか，これら 4 種類の簡約のどれかが可能であることを示した．永田の自己同型はアフィン自己同型でなく，基本簡約可能でもない．さらに，これら 4 種類のどの簡約も可能でない．それにより，永田予想は正しいと結論される．なお，I 型簡約可能な自己同型の存在は Shestakov-Umirbaev [10, Example 1] により示されたが，II-IV 型簡約可能自己同型は存在するかどうか分かっていない．

自己同型を分析するために，Shestakov-Umirbaev [9, Theorem 3] は多項式の次数に関するある不等式を示した (系 2.2)．彼らの理論はこの不等式を基礎に構築されており，永田予想の解決において極めて重要な役割を果たしたといえる．さらに，論文 [9] でも言及されているように，この不等式から命題 1.1 も導ける．従って，Shestakov-Umirbaev 不等式は Jung の定理も含意する．

本稿では，まず第 2 節で Shestakov-Umirbaev 不等式の一般化を与える (定理 2.1)．この定理には，独自の論法による極めて簡明な証明を付ける．次に，これを利用し命題 1.1 を一般化する (定理 2.3)．第 3 節では，局所冪零微分を用いて I 型簡約可能な自己同型の新しい例を構成する．第 4 節では，最近の研究で新たに得られた成果を報告する．これは，一般化された Shestakov-Umirbaev 不等式を用い，Shestakov-Umirbaev による永田予想の証明を簡略化するというものである．

2 Shestakov-Umirbaev 不等式と Jung の定理

まず，多項式環の次数付けに関し幾つか定義を行う．Γ を順序加群，$\mathbf{w}=(w_1,\ldots,w_n)$ を Γ^n の元とする．各 $\gamma\in\Gamma$ に対し，

$$\{x_1^{a_1}\cdots a_n^{a_n}\mid a_1,\ldots,a_n\in\mathbf{Z}_{\geq 0},a_1w_1+\cdots+a_nw_n=\gamma\}$$

が生成する $k[\mathbf{x}]$ の k 部分ベクトル空間を $k[\mathbf{x}]_\gamma$ とおく．ここで，$\mathbf{Z}_{\geq 0}$ は非負整数全体の集合を表す．$k[\mathbf{x}]$ はこれらのベクトル空間の直和であり，各 $f\in k[\mathbf{x}]_\gamma$ と $g\in k[\mathbf{x}]_\mu$ $(\gamma,\mu\in\Gamma)$ に対し，fg は $k[\mathbf{x}]_{\gamma+\mu}$ に含まれる．よって，$k[\mathbf{x}]$ に Γ 次数付き k 代数の構造が定まる．$f=\sum_{\gamma\in\Gamma}f_\gamma$ $(f_\gamma\in k[\mathbf{x}]_\gamma,\ \gamma\in\Gamma)$ を $k[\mathbf{x}]$ の元とする．$f\neq 0$ のとき，$\mathbf{w}$ を重みとする f の次数 $\deg_{\mathbf{w}} f$ を

$$\deg_{\mathbf{w}} f=\max\{\gamma\in\Gamma\mid f_\gamma\neq 0\}$$

により定義する．$f=0$ のときは $\deg_{\mathbf{w}} f=-\infty$, すなわち Γ のどの元よりも小さく，各 $\gamma\in\Gamma\cup\{-\infty\}$ に対し $\gamma+(-\infty)=(-\infty)+\gamma=-\infty$ を満たす記号と定める．$f\neq 0$ の

とき $f^{\mathbf{w}} = f_\mu$ $(\mu = \deg_{\mathbf{w}} f)$ と定義する．$\Gamma = \mathbf{Z}$, $w_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ ならば，$\mathbf{w}$ を重みとする次数は全次数と等しい．

さて，$k[\mathbf{x}][y]$ を $k[\mathbf{x}]$ 上の 1 変数多項式環とする．$k[\mathbf{x}][y] \setminus \{0\}$ の元 $\Phi = \sum_i \phi_i y^i$ $(\phi_i \in k[\mathbf{x}],\ i \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$ と $g \in k[\mathbf{x}] \setminus \{0\}$ に対し，$\Phi(g) = \sum_i \phi_i g^i$ の次数 $\deg_{\mathbf{w}} \Phi(g)$ は，一般に

$$\deg_{\mathbf{w}}^g \Phi := \max\{\deg_{\mathbf{w}}(\phi_i g^i) \mid i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}$$

を超えない．以下では，$\deg_{\mathbf{w}}^g \Phi$ と $\deg_{\mathbf{w}} \Phi(g)$ の差を記述する不等式を与える．

各 $i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対し，Φ の y に関する i 階の導関数を $\Phi^{(i)}$ で表す．すると，十分大きな i に対し，$\deg_{\mathbf{w}}^g \Phi^{(i)} = \deg_{\mathbf{w}} \Phi^{(i)}(g)$ が成り立つ．よって，

$$m_g^{\mathbf{w}}(\Phi) := \min\{i \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \mid \deg_{\mathbf{w}}^g \Phi^{(i)} = \deg_{\mathbf{w}} \Phi^{(i)}(g)\}$$

が定義される．仮定より k の標数は零なので，$m_g^{\mathbf{w}}(\Phi) \geq 1$, $\Phi \in k[\mathbf{x}][y] \setminus k[\mathbf{x}]$ ならば，それぞれ

$$m_g^{\mathbf{w}}(\Phi) = m_g^{\mathbf{w}}(\Phi^{(1)}) + 1, \qquad \deg_{\mathbf{w}}^g \Phi = \deg_{\mathbf{w}}^g \Phi^{(1)} + \deg_{\mathbf{w}} g \tag{2.1}$$

が成り立つ．

$\Omega_{k[\mathbf{x}]/k}$ を $k[\mathbf{x}]$ の k 上の微分加群とする．各 $r \in \mathbf{N}$ に対し，$k[\mathbf{x}]$ 加群 $\Omega_{k[\mathbf{x}]/k}$ の r 重の外積 $\bigwedge^r \Omega_{k[\mathbf{x}]/k}$ を考える．$\bigwedge^r \Omega_{k[\mathbf{x}]/k}$ の任意の元 ω は

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} f_{i_1,\ldots,i_r} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \qquad (f_{i_1,\ldots,i_r} \in k[\mathbf{x}],\ i_1, \ldots, i_r)$$

の形に一意的に表せる．ここで，各 $f \in k[\mathbf{x}]$ に対し df は f の微分を表す．このとき，$\mathbf{w}$ を重みとする ω の次数 $\deg_{\mathbf{w}} \omega$ を

$$\deg_{\mathbf{w}} \omega = \max\{\deg_{\mathbf{w}}(f_{i_1,\ldots,i_r}) + w_{i_1} + \cdots + w_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$$

により定義する．例えば，$f \in k[\mathbf{x}]$ に対し $df = \sum_{i=1}^n (\partial f / \partial x_i) dx_i$ となるので，

$$\deg_{\mathbf{w}} df = \max\left\{\deg_{\mathbf{w}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + w_i \mid i = 1, \ldots, n\right\} = \deg_{\mathbf{w}} f \tag{2.2}$$

が成り立つ．また，各 $\omega \in \bigwedge^r \Omega_{k[\mathbf{x}]/k}$, $\eta \in \bigwedge^s \Omega_{k[\mathbf{x}]/k}$ $(r, s \in \mathbf{N})$ と $f \in k[\mathbf{x}]$ に対し，

$$\deg_{\mathbf{w}}(\omega \wedge \eta) \leq \deg_{\mathbf{w}} \omega + \deg_{\mathbf{w}} \eta, \qquad \deg_{\mathbf{w}}(f\omega) = \deg_{\mathbf{w}} f + \deg_{\mathbf{w}} \omega \tag{2.3}$$

が成り立つ．

次の定理は Shestakov-Umirbaev 不等式 [9, Theorem 3] の一般化である．

定理 2.1 $f_1, \ldots, f_r \in k[\mathbf{x}]$ $(r \in \{1, \ldots n\})$ は k 上代数的独立であるとする．このとき，各 $\Phi \in k[f_1, \ldots, f_r][y] \setminus \{0\}$, $g \in k[\mathbf{x}] \setminus \{0\}$ と $\mathbf{w} \in \Gamma^n$ に対し

$$\deg_{\mathbf{w}} \Phi(g) \geq \deg_{\mathbf{w}}^g \Phi + m_g^{\mathbf{w}}(\Phi)(\deg_{\mathbf{w}}(\omega \wedge dg) - \deg_{\mathbf{w}} \omega - \deg_{\mathbf{w}} g) \tag{2.4}$$

が成り立つ．ここで，$\omega = df_1 \wedge \cdots \wedge df_r$ とする．

証明　一般に，$h_1, \ldots, h_s \in k[\mathbf{x}]$ $(s \in \{1, \ldots, n\})$ に対し，$h_1, \ldots, h_s$ が k 上代数的従属であるための必要十分条件は，$s \times n$ 行列 $(\partial h_i / \partial x_j)_{i,j}$ の s 次の小行列式が全て 0 になることである．これは，$dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_s = 0$ と同値である．仮定より $f_1, \ldots, f_r$ は k 上代数的独立なので $\omega \neq 0$ となる．また，$\omega \wedge df_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ が成り立つ．連鎖律より，$d(\Phi(g)) = \Phi^{(1)}(g)dg + \sum_{i=1}^r \psi_i df_i$ $(\psi_i \in k[\mathbf{x}],\ i = 1, \ldots, r)$ と表せる．ゆえに，

$$\omega \wedge d(\Phi(g)) = \Phi^{(1)}(g)\omega \wedge dg + \sum_{i=1}^{r} \psi_i \omega \wedge df_i = \Phi^{(1)}(g)\omega \wedge dg \tag{2.5}$$

となる．(2.2), (2.3), (2.5) より，不等式

$$\begin{aligned} \deg_{\mathbf{w}} \omega + \deg_{\mathbf{w}} \Phi(g) &= \deg_{\mathbf{w}} \omega + \deg_{\mathbf{w}} d(\Phi(g)) \geq \deg_{\mathbf{w}}(\omega \wedge d(\Phi(g))) \\ &= \deg_{\mathbf{w}}(\Phi^{(1)}(g)\omega \wedge dg) = \deg_{\mathbf{w}} \Phi^{(1)}(g) + \deg_{\mathbf{w}}(\omega \wedge dg) \end{aligned} \tag{2.6}$$

が得られる．$\omega \neq 0$ なので，(2.6) の両辺から $\deg_{\mathbf{w}} \omega$ を引くと，

$$\deg_{\mathbf{w}} \Phi(g) \geq \deg_{\mathbf{w}} \Phi^{(1)}(g) + \deg_{\mathbf{w}}(\omega \wedge dg) - \deg_{\mathbf{w}} \omega \tag{2.7}$$

となる．さて，定理の主張 (2.4) を $m_g^{\mathbf{w}}(\Phi)$ に関する帰納法で示す．$m_g^{\mathbf{w}}(\Phi) = 0$ ならば，$m_g^{\mathbf{w}}(\Phi)$ の定義より $\deg_{\mathbf{w}} \Phi(g) = \deg_{\mathbf{w}}^g \Phi$ が成立する．このとき (2.4) は正しい．次に $m_g^{\mathbf{w}}(\Phi) \geq 1$ と仮定する．このとき，(2.1) より $m_g^{\mathbf{w}}(\Phi^{(1)})$ は $m_g^{\mathbf{w}}(\Phi)$ より小さい．よって，帰納法の仮定と (2.1) より

$$\begin{aligned} \deg_{\mathbf{w}} \Phi^{(1)}(g) &\geq \deg_{\mathbf{w}}^g \Phi^{(1)} + m_g^{\mathbf{w}}(\Phi^{(1)})M \\ &= (\deg_{\mathbf{w}}^g \Phi - \deg_{\mathbf{w}} g) + (m_g^{\mathbf{w}}(\Phi) - 1)M \end{aligned} \tag{2.8}$$

となる．ここで，$M = \deg_{\mathbf{w}}(\omega \wedge dg) - \deg_{\mathbf{w}} \omega - \deg_{\mathbf{w}} g$ とおく．(2.7) と (2.8) より，

$$\begin{aligned} \deg_{\mathbf{w}} \Phi(g) &\geq \deg_{\mathbf{w}} \Phi^{(1)}(g) + \deg_{\mathbf{w}}(\omega \wedge dg) - \deg_{\mathbf{w}} \omega \\ &\geq (\deg_{\mathbf{w}}^g \Phi - \deg_{\mathbf{w}} g) + (m_g^{\mathbf{w}}(\Phi) - 1)M + \deg_{\mathbf{w}}(\omega \wedge dg) - \deg_{\mathbf{w}} \omega \\ &= \deg_{\mathbf{w}}^g \Phi + m_g^{\mathbf{w}}(\Phi)(\deg_{\mathbf{w}}(\omega \wedge dg) - \deg_{\mathbf{w}} \omega - \deg_{\mathbf{w}} g) \end{aligned}$$

が従う．ゆえに，(2.4) は $m_g^{\mathbf{w}}(\Phi)$ がどのような非負整数でも成り立つ．　□

定理 2.1 の系として，Shestakov-Umirbaev が永田予想を解決するために用いた不等式 [9, Theorem 3] が得られる．

系 2.2 (Shestakov-Umirbaev 不等式) $f, g \in k[\mathbf{x}]$ は k 上代数的独立であるとする．このとき，各 $\Phi \in k[f][y] \setminus \{0\}$ に対し

$$\deg \Phi(g) \geq (\deg_y \Phi) \deg g + q(\deg(df \wedge dg) - \deg f - \deg g)$$

が成り立つ．ここで，q は y に関する Φ の次数 $\deg_y \Phi$ を $(\deg f)/\gcd(\deg f, \deg g)$ で割った商とする．

定理 2.1 の帰結として，$k[\mathbf{x}]$ の自己準同型 $F = (f_1, \ldots, f_n)$ が自己同型であるための次のような必要条件も得られる．$\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ は $w_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たす Γ^n の元とし，$k(f_1^{\mathbf{w}}, \ldots, f_n^{\mathbf{w}})$ の k 上の超越次数は $n-1$ であると仮定する．このとき，Γ の元 $\Delta_F^{\mathbf{w}}$ を次のように定義する．仮定より，準同型 $F^{\mathbf{w}} = (f_1^{\mathbf{w}}, \ldots, f_n^{\mathbf{w}})$ の核は，$k[\mathbf{x}]$ の高さ 1 の素イデアルである．よって，$\ker F^{\mathbf{w}} = Pk[\mathbf{x}]$ を満たす素元 $P \in k[\mathbf{x}]$ が存在する．このとき，$(\deg_{\mathbf{w}} f_1, \ldots, \deg_{\mathbf{w}} f_n)$ を重みとする P の次数を $\Delta_F^{\mathbf{w}}$ とおく．$\Delta_F^{\mathbf{w}}$ は P の選び方に依らず，F と $\mathbf{w}$ に対し一意的に定まる．

定理 2.3 上の仮定の下で，F が $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属すならば

$$\deg_{\mathbf{w}} F \geq \Delta_F^{\mathbf{w}} + \sum_{i=1}^{n} w_i - \max\{w_i \mid i = 1, \ldots, n\}$$

が成り立つ．

この定理の系として次が得られる．

系 2.4 $\Gamma = \mathbf{Z}$ とし，$\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ は $w_1 > 0,\ w_2 > 0$ を満たす Γ^2 の元とする．$\mathrm{Aut}_k\, k[x_1, x_2]$ の元 $F = (f_1, f_2)$ に対し，$f_1^{\mathbf{w}}$ と $f_2^{\mathbf{w}}$ が k 上代数的従属ならば

$$\deg_{\mathbf{w}} f_1 + \deg_{\mathbf{w}} f_2 = \deg_{\mathbf{w}} F \geq \mathrm{lcm}(\deg_{\mathbf{w}} f_1, \deg_{\mathbf{w}} f_2) + \min\{w_1, w_2\}$$

が成り立つ．

特に $\mathbf{w} = (1, 1)$ ならば，先述のように $\deg_{\mathbf{w}} f_i$ は f_i の全次数 $\deg f_i$ と等しい．このとき，$f_1^{\mathbf{w}}$ と $f_2^{\mathbf{w}}$ が代数的独立ならば，F はアフィン自己同型である．一方，$f_1^{\mathbf{w}}$ と $f_2^{\mathbf{w}}$ が代数的従属ならば，系 2.4 より $\deg f_1 + \deg_{\mathbf{w}} f_2 > \mathrm{lcm}(\deg f_1, \deg f_2)$ が従う．この不等式は，$\deg f_1$ が $\deg f_2$ を割り切るか，$\deg f_2$ が $\deg f_1$ を割り切ることを意味する．よって，系 2.4 より命題 1.1 が従う．よって，定理 2.3 は Jung の定理の一般化である．

3 I 型簡約可能な自己同型の構成

この節では，Shestakov-Umirbaev [10, Definition 1] が導入した I 型簡約可能な自己同型の新しい例を構成する．以下，本節では常に $n = 3$, $\Gamma = \mathbf{Z}$, $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$ とする．

自己同型 $F = (f_1, f_2, f_3)$ が I 型簡約可能 (admits a reduction of type I) であるとは，必要に応じて添え字を付け替えることにより，次を満たすようにできるときにいう：

(I1) $\deg f_1 : \deg f_2 = 2 : s$ を満たす奇数 $s \geq 3$ が存在する．

(I2) $\deg f_1 < \deg f_3 \leq \deg f_2$ が成り立つ．$f_3^{\mathbf{w}}$ は $k[f_1^{\mathbf{w}}, f_2^{\mathbf{w}}]$ に属さない．

(I3) 次を満たす $\alpha \in k \setminus \{0\}$ と $\phi \in k[f_1, g_2]$ が存在する．ここで，$g_2 = f_2 - \alpha f_3$ とおく．

(i) $\deg g_2 = \deg f_2$ であり，なおかつ $f_1^{\mathbf{w}}$ と $g_2^{\mathbf{w}}$ は k 上代数的従属である．

(ii) $\deg(f_3 + \phi) < \deg f_3$ かつ $\deg(df_1 \wedge d(f_3 + \phi)) < \deg f_2 + \deg(df_1 \wedge dg_2)$ である．

I 型簡約可能な自己同型は基本簡約可能でないことが，[10, Proposition 1] から確かめられる．一方，条件 (I3) の (ii) より $F' := (f_1, g_2, f_3)$ は基本簡約可能である．条件 (I3) の (i) より $\deg F = \deg F'$ なので，最終的に得られる $G := (f_1, g_2, f_3 + \phi)$ の次数 $\deg G$ は $\deg F$ より小さくなる．この G を F の I 型簡約 (reduction of type I) と呼ぶ．

Shestakov-Umirbaev [10, Example 1] は，$s = 3$ の場合に I 型簡約可能な自己同型の例を初めて与えた．Van den Essen–Makar-Limanov–Willems [1, Sections 3, 4 and 5] は，計算機を用いて $s = 3, 5, 7$ の場合に I 型簡約可能な己同型の族を構成した．しかし，$s \geq 3$ が一般の奇数の場合に，I 型簡約可能な自己同型が存在するかどうかは分かっていなかった．以下では，局所冪零微分を用いて，$s \geq 3$ が一般の奇数の場合に I 型簡約可能な自己同型を構成する．

自然数 p と q に対し，$k[\mathbf{x}]$ における k 上の微分作用素 D と E を

$$\begin{aligned} D(x_1) = x_2^{q+1}, \quad D(x_2) = 0, \quad D(x_3) = (p+1)x_1^p x_2^q, \\ E(x_1) = 2x_3, \quad E(x_2) = 2(p+1)x_1^p, \quad E(x_3) = 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

により定義する．このとき，D と E は三角であることに注意する．ここで，$k[\mathbf{x}]$ における k 上の微分作用素 Δ が三角であるとは，各 $i \in \{1, \ldots, n\}$ と $\{1, \ldots, n\}$ の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し，$\Delta(x_{\sigma(i)})$ が $k[x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i-1)}]$ に属すときにいう．このとき，Δ は局所冪零である．すなわち，各 $f \in k[\mathbf{x}]$ に対し $l \in \mathbf{N}$ を十分大きく取れば $\Delta^l(f) = 0$ が成り立つ．一般に，局所冪零微分 Δ に対し，写像

$$\exp \Delta : k[\mathbf{x}] \ni f \mapsto \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Delta^l(f)}{l!} \in k[\mathbf{x}]$$

は $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属す．さらに Δ が三角ならば，$\exp\Delta$ は $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に含まれる．また，Δ が三角で $\Delta(x_n)=1$ を満たすとき，

$$h_i^\Delta = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Delta^l(x_i)}{l!}(-x_n)^l \quad (i=1,\ldots,n-1)$$

とおくと，$H^\Delta := (h_1^\Delta,\ldots,h_{n-1}^\Delta,x_n)$ は $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属す．

さて，(3.1) から定まる微分作用素 D と E は三角であり，さらに E は $E(x_3)=1$ を満たす．従って，$G:=\exp D$ と $H:=H^E$ は共に $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属す．$k[\mathbf{x}]$ の基本自己同型 E_1 と E_2 を

$$E_1 = (x_1, x_2, x_3 + c^2x_1^s + x_2^2), \quad E_2 = (x_1, x_2 + x_3, x_3)$$

により定義する．ここで，

$$c = (-2)^{p+1}\prod_{i=1}^{p}\frac{i+1}{2i+1} \tag{3.2}$$

とおく．このとき，$F := G\circ H\circ E_1\circ E_2$ は $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属す．さらに，次が成り立つ．

定理 3.1 ([5, Theorem 2.2]) p と q を任意の自然数とする．このとき，上で構成した F は $s=2p+1$, $\alpha=1$, $\phi=g_2^2+cf_1^s$ に対し，条件 (I1), (I2), (I3) を満たす．

定理 3.1 の証明は，$G\circ H =: (f_1', f_2', f_3')$ が $m=pq+p+q$ に対し

$$\deg f_1' = 2m,\ \deg f_2' = sm,\ \deg f_3' = m,\ \deg(c^2(f_1')^s + (f_2')^2) = 2pm+p+1 \tag{3.3}$$

を満たすことの証明に帰着する．ここで重要なのは，$\deg f_1' : \deg f_2' = 2 : s$ かつ $\deg(c^2(f_1')^s+(f_2')^2) = 2pm+p+1 = sm-pq-q+1 < \deg f_2'$ が成り立つことである．$c^2(f_1')^s$ と $(f_2')^2$ の次数は共に $2ms$ だが，これらを足すと次数の高い項が半分以上打ち消し合い，次数は $\deg f_2'$ 未満になる．$G\circ H$ が (3.3) を満たすことは次のようにして示す．

まず，$I = x_2x_3 - x_1^{p+1}$ は D の核に含まれることに注意する．このことから，$G(I)=I$ が従う．また，$\deg h_1^E = 2$, $\deg h_2^E = s$, $\deg(c^2(h_1^E)^s + (h_2^E)^2) = 3p+1$ である．実際，

$$h_1^E = -x_3^2 + \cdots, \quad h_2^E = cx_3^s + \cdots, \quad c^2(h_1^E)^s + (h_2^E)^2 = 2cx_3^{2p}I + \cdots$$

のように表せる．ここで，$\cdots$ は次数が十分小さく考慮が不要な項を表す．一方，これらを G で写すと

$$f_1' = G(h_1^E) = -G(x_3)^2 + \cdots, \quad f_2' = G(h_2^E) = cG(x_3)^s + \cdots$$
$$c^2(f_1')^s + (f_2')^2 = G(c^2(h_1^E)^s + (h_2^E)^2) = 2cG(x_3)^{2p}G(I) + \cdots = 2cG(x_3)^{2p}I + \cdots$$

となる．$\deg G(x_3) = m$ であることより，これらの式から (3.3) が従う．

4 Shestakov-Umirbaev 理論の精密化

Shestakov-Umirbaev [10] は，不等式 [9, Theorem 3] (系 2.2) を基礎に理論を展開し，$\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元が $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属すための必要条件を与えた．そして，それを用いて永田の自己同型が $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属さないことを導いた．彼らの理論は複雑で，証明も長い．しかし最近，この不等式の一般化である定理 2.1 の活用により，議論をある程度簡略化できることが分かった．本節では，こうした新しい結果について報告する．

以下では $n=3$ とし，Γ^3 の元 $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)$ は $w_i>0$ $(i=1,2,3)$ を満たすとする．$\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元 $F=(f_1,f_2,f_3)$ に対し，次の条件 (A) と (B) を考える．

(A) $f_3^{\mathbf{w}}=h^{\mathbf{w}}$ を満たす $h\in k[f_1,f_2]$ が存在する．

$\deg_{\mathbf{w}} f_1$ と $\deg_{\mathbf{w}} f_2$ が $\mathbf{Z}$ 上 1 次独立であるときは，条件 (A) は $\deg_{\mathbf{w}} f_1$ と $\deg_{\mathbf{w}} f_2$ が生成する Γ の部分半群に $\deg_{\mathbf{w}} f_3$ が属すことと同値である．

(B) 次を満たす $a,b,c\in k$, $\phi\in k[g_1,g_2]$ と奇数 $s\ge 3$ が存在する．ただし，$g_1=f_1+af_3^2+cf_3$, $g_2=f_2+bf_3$, $g_3=f_3+\phi$, $\delta=(1/2)\deg_{\mathbf{w}} f_2$ とする．

(b1) $(g_1^{\mathbf{w}})^2$ と $(g_2^{\mathbf{w}})^s$ は 1 次従属である．

(b2) $\deg_{\mathbf{w}} f_1\le\deg_{\mathbf{w}} g_1$ が成り立つ．$\deg_{\mathbf{w}} f_1<\deg_{\mathbf{w}} g_1$ ならば $s=3$ かつ

$$\frac{5}{2}\delta+\deg_{\mathbf{w}}(dg_1\wedge dg_2)\le\deg_{\mathbf{w}} f_1<3\delta,\quad \deg_{\mathbf{w}} f_3=\frac{3}{2}\delta$$

が成り立つ．

(b3) $\deg_{\mathbf{w}} f_2=\deg_{\mathbf{w}} g_2$ が成り立つ．

(b4) $(s-2)\delta+\deg_{\mathbf{w}}(dg_1\wedge dg_2)\le\deg_{\mathbf{w}} f_3\le s\delta$ が成り立つ．

(b5) $\deg_{\mathbf{w}} g_3<(s-2)\delta+\deg_{\mathbf{w}}(dg_1\wedge dg_2)$ が成り立つ．

(b6) $f_3^{\mathbf{w}}$ は $k[g_1^{\mathbf{w}},g_2^{\mathbf{w}}]$ に属さない．

(b7) 次の等式と不等式が成り立つ．

$$\deg_{\mathbf{w}}(df_1\wedge df_2)=\begin{cases}\deg_{\mathbf{w}} f_3+\deg_{\mathbf{w}}(df_2\wedge df_3) & (a\ne 0)\\ \deg_{\mathbf{w}}(df_1\wedge df_3) & (a=0,b\ne 0)\\ \deg_{\mathbf{w}}(df_2\wedge df_3) & (a=b=0,c\ne 0)\\ \deg_{\mathbf{w}}(dg_1\wedge dg_2) & (a=b=c=0)\end{cases}$$

$$\deg_{\mathbf{w}}(df_1\wedge df_3)=(s-2)\delta+\deg_{\mathbf{w}}(df_2\wedge df_3)$$

$$\deg_{\mathbf{w}}(df_2\wedge df_3)\ge s\delta+\deg_{\mathbf{w}}(dg_1\wedge dg_2).$$

条件 (b2)–(b4) より $\delta<\deg_{\mathbf{w}} f_i\le s\delta$ $(i=1,2,3)$ が従う．よって，各 $i,j\in\{1,2,3\}$ に対し $s\deg_{\mathbf{w}} f_i>\deg_{\mathbf{w}} f_j$ が成り立つことに注する．

Shestakov-Umirbaev [10] の議論を改良することで，次の定理が得られる．

定理 4.1 ([6]) $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元 $F=(f_1,f_2,f_3)$ は $\deg_{\mathbf{w}} F > w_1+w_2+w_3$ を満たすとする．このとき，ある $\sigma\in\mathfrak{S}_3$ に対し $F_\sigma := (f_{\sigma(1)}, f_{\sigma(2)}, f_{\sigma(3)})$ は条件 (A) または (B) を満たす．

一般に，$F\in\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ に対し $\deg_{\mathbf{w}} F \geq w_1+w_2+w_3$ が成り立つ．また，$\deg_{\mathbf{w}} F = w_1+w_2+w_3$ ならば F は $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属す．なお，(B) には具体的な条件が多く含まれているが，実は $F=(f_1,f_2,f_3)$ が (B) を満たすことと，次を満たす $g_1,g_2,g_3\in k[\mathbf{x}]$ が存在することは同値である：

(1) g_1-f_1, g_2-f_2, g_3-f_3 はそれぞれ $k[f_2,f_3]$, $k[f_3]$, $k[g_1,g_2]$ に属す．

(2) $\deg_{\mathbf{w}} f_i \leq \deg_{\mathbf{w}} g_i$ $(i=1,2)$ が成り立つ．

(3) $\deg_{\mathbf{w}} g_2 < \deg_{\mathbf{w}} g_1$ であり，なおかつ $g_1^{\mathbf{w}}$ は $k[g_2^{\mathbf{w}}]$ に属さない．

(4) $\deg_{\mathbf{w}} f_3 \leq \deg_{\mathbf{w}} g_1$ であり，なおかつ $f_3^{\mathbf{w}}$ は $k[g_1^{\mathbf{w}}, g_2^{\mathbf{w}}]$ に属さない．

(5) $\deg_{\mathbf{w}} g_3 < \min\{\deg_{\mathbf{w}} f_3, \deg_{\mathbf{w}} g_1 - \deg_{\mathbf{w}} g_2 + \deg_{\mathbf{w}}(dg_1\wedge dg_2)\}$ が成り立つ．

さて，定理 4.1 を使うと，(1.1) の自己同型 F が $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属さないことを次のようにして確かめられる．$\Gamma=\mathbf{Q}^3$ には辞書式順序が定義されているとする．すなわち，各 $a,b\in\mathbf{Q}^3$ に対し，$b-a$ の零でない最初の成分が正のとき $a\leq b$ であるとする．$\mathbf{Q}^3$ の座標単位ベクトル $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ に対し，$\mathbf{w}=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ と定める．すると，

$$\deg_{\mathbf{w}} f_1=(2,0,3),\quad \deg_{\mathbf{w}} f_2=(1,0,2),\quad \deg_{\mathbf{w}} f_3=(0,0,1) \tag{4.1}$$

となる．従って，

$$\deg_{\mathbf{w}} F=(2,0,3)+(1,0,2)+(0,0,1)=(3,0,6)>(1,1,1)=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$$

が成り立つ．一方，(4.1) の 3 つのベクトルはどの 2 つも 1 次独立だが，各 $\sigma\in\mathfrak{S}_3$ に対し $\deg_{\mathbf{w}} f_{\sigma(3)}$ は $\deg_{\mathbf{w}} f_{\sigma(1)}$ と $\deg_{\mathbf{w}} f_{\sigma(2)}$ が生成する Γ の部分半群に属さない．これは F_σ が (A) を満たさないことを意味する．さらに辞書式順序の定義より，任意の $l\in\mathbf{N}$ に対し $l\deg_{\mathbf{w}} f_3$ は $\deg_{\mathbf{w}} f_1$ と $\deg_{\mathbf{w}} f_2$ より小さい．これは F_σ が (B) を満たすような $\sigma\in\mathfrak{S}_3$ が存在しないことを意味する．よって，$(f_{\sigma(1)}, f_{\sigma(2)}, f_{\sigma(3)})$ が (A) または (B) を満たすような $\sigma\in\mathfrak{S}_3$ は存在しない．ゆえに，定理 4.1 より F は $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属さない．

第 1 節でも述べたが, Shestakov-Umirbaev [10] は，アフィン自己同型でない $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{x}]$ の元は基本簡約可能であるか，I 型，II 型，III 型，IV 型と呼ばれる 4 種類の簡約のいずれかが可能であることを示した．II 型・III 型簡約の定義は I 型の場合と似ているが，IV 型簡約の定義は若干異なる．一方，$\Gamma=\mathbf{Z}$, $\mathbf{w}=(1,1,1)$ のとき，ある $\sigma\in\mathfrak{S}_3$ に対し F_σ

が条件 (A) を満たすことと F が基本簡約可能であることは同値である．また，F_σ が条件 (B) を満たすような $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ が存在すれば，実は I 型簡約, II 型簡約, III 型簡約のどれかが可能である．よって，定理 4.1 の帰結として，$\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ のアフィンでない元 F は，基本簡約可能であるか，I 型簡約, II 型簡約, III 型簡約のどれかが可能であることが分かる．従って，IV 型簡約可能な自己同型は実は考慮しなくてよい．事実，$\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ のどの元も IV 型可能でないことが証明される．このように，自己同型が $\mathrm{T}_k\, k[\mathbf{x}]$ に属すためのより精確な必要条件を得られたのは，Shestakov-Umirbaev 不等式の代わりにその一般化である定理 2.1 使うことで，永田予想の証明の中核をなす [10, Proposition 4] の改良に成功したためである．

なお，自己同型 $F = (f_1, f_2, f_3)$ が IV 型簡約可能であるとは，必要に応じて添え字を付け替えることにより，次を満たすようにできるときにいう [10, Definition 4]：

(IV1) $l = (1/2)\deg f_1$ に対し

$$\deg f_2 = 3l,\ l < \deg f_3 \le \frac{3}{2}l \quad \text{または} \quad \frac{5}{2}l < \deg f_2 \le 3l,\ \deg f_3 = \frac{3}{2}l$$

が成り立つ．

(IV2) 次を満たす $\alpha, \beta, \gamma \in k$ と $\phi \in k[g_1, g_2] \setminus k$ が存在する．ここで，$g_1 = f_1 - \beta f_3$, $g_2 = f_2 - \alpha f_3^2 - \gamma f_3$ とする．

(i) $\deg g_1 = 2l$, $\deg g_2 = 3l$ であり，なおかつ $g_1^{\mathbf{w}}$ と $g_2^{\mathbf{w}}$ は k 上代数的従属である．

(ii) $\deg \phi \le (3/2)l$ かつ $\deg(df_1 \wedge d(f_3 + \phi)) < 3l + \deg(df_1 \wedge dg_2)$ が成り立つ．

(iii) $\deg(g_2 - \mu(\sigma f_3 + \phi)^2) \le 2l$ を満たす $\mu, \sigma \in k \setminus \{0\}$ が存在する．

最後に，議論の簡略化には，次数付けの工夫も有効であることに触れる．Shestakov-Umirbaev は全次数に注目して自己同型の簡約を考えたが，$\mathbf{w} = (1,1,1)$ の場合には，$f, g \in k[\mathbf{x}] \setminus \{0\}$ が $\deg_{\mathbf{w}} f = \deg_{\mathbf{w}} g$ を満たしても一般に $f^{\mathbf{w}}$ と $g^{\mathbf{w}}$ は k 上 1 次従属とは限らない．しかし，例えば $\Gamma = \mathbf{Q}^3$, $\mathbf{w} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ の場合のように，w_1, w_2, w_3 が $\mathbf{Z}$ 上 1 次独立ならば $\deg_{\mathbf{w}} f = \deg_{\mathbf{w}} g$ であることと $f^{\mathbf{w}}$ と $g^{\mathbf{w}}$ が k 上 1 次従属であることは同値になる．実際，各 $\gamma \in \Gamma$ に対し k ベクトル空間 $k[\mathbf{x}]_\gamma$ は高々 1 次元となる．このような場合に限ると，定理 4.1 の証明は短縮でき，従って永田予想の証明もより簡略化できる．

参考文献

[1] A. van den Essen, L. Makar-Limanov, and R. Willems, Remarks on Shestakov-Umirbaev, Report 0414, Radboud University of Nijmegen, Toernooiveld, 6525 ED

Nijmegen, The Netherlands, 2004.

[2] H. Jung, Über ganze birationale Transformationen der Ebene, J. Reine Angew. Math. **184** (1942), 161–174.

[3] W. van der Kulk, On polynomial rings in two variables, Nieuw Arch. Wisk. (3) **1** (1953), 33–41.

[4] S. Kuroda, A generalization of the Shestakov-Umirbaev inequality, arXiv:math. AC/0707.1361

[5] S. Kuroda, Automorphisms of a polynomial ring which admit reductions of type I, arXiv:math.AC/0708.2120

[6] S. Kuroda, Shestakov-Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism, in preparation.

[7] M. Nagata, On Automorphism Group of $k[x, y]$, Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto University, Vol. 5, Kinokuniya Book-Store Co. Ltd., Tokyo, 1972.

[8] M. K. Smith, Stably tame automorphisms, J. Pure Appl. Algebra **58** (1989), 209–212.

[9] I. Shestakov and U. Umirbaev, Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 181–196.

[10] I. Shestakov and U. Umirbaev, The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 197–227.

〒192-0397 八王子市南大沢 1-1
首都大学東京 大学院理工学研究科 数理情報科学専攻
E-mail: kuroda@tmu.ac.jp