Intersection multiplicity の代数的な記述について

蔵野和彦

明治大学理工学部

1 序

非特異な代数多様体の二つの閉部分多様体が一点で交わるとしよう。このとき、その交点での intersection multiplicity を代数的に記述する問題は、van der Waerden によって深く研究され、Chevalley [3] によって解決されたと言える。Chevalley の方法は、二つの閉部分多様体のファーバー積を考え、ダイアゴナルの定義イデアルでの重複度として定義するというものである。彼自身によって展開された局所環の (極大イデアルではなく) パラメーターイデアルに関する重複度の概念が、この定義の中で重要な役割を果たしている。

その後、1950 年代にホモロジー代数が可換環論に導入され、Serre [31] は、ホモロジー代数の言葉を用いて intersection multiplicity の記述を行った。もちろん、Chevalley が定めたものと、同じ値になる。Chevalley の定義では、体上でのファイバー積をとることが必要であった。しかし、Serre の定義では、もはやファイバー積をとる必要がなくなり、従って、混合標数の正則スキームに対しても intersection multiplicity が定義されるようになった。Chevalley の理論 (等標数の場合) では、本質的に intersection multiplicity は局所環のあるパラメーターイデアルに関する重複度に帰着されるが、そのケースではいろいろ強力な道具があるため、様々なことが証明できる。ところが、混合標数の場合は、そのような帰着ができないので、正しい次元で交わっている二つの閉部分多様体の intersection multiplicity が正であることさえもわからないのである。

その Serre によって定義された intersection multiplicity を研究することは、可換環論における一つのテーマとなり、それに関連して多くの理論が生まれ、またいろいろな道具が可換環論にもたらされた。

このノートでは、前半は、Serre による intersection multiplicity の定義と Serre 予想について解説する。後半は、Serre 予想に関連して、蔵野自身が興味をもっている問題についてまとめる。

2 intersection multiplicity の代数的な記述 ($\mathbb{C}^n$ の閉部分多様体が一点で交わっている場合)

$\mathbb{C}$ は、複素数体であるとする。

この節では、$X=\mathbb{C}^n$ とする。Y, Z は X の閉部分多様体で、x は $Y\cap Z$ の孤立点であるとする。(つまり、$\{x\}$ は、$Y\cap Z$ の既約成分である。)

このとき、

$$\chi_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Y,x},\mathcal{O}_{Z,x}):=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\ell_{\mathcal{O}_{X,x}}\left(\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Y,x},\mathcal{O}_{Z,x})\right)$$

は整数となる。($\mathcal{O}_{X,x}$ は正則局所環であること、$\{x\}$ は $Y\cap Z$ の既約成分であるので、Tor はすべて長さ有限であることに注意する。) Serre [31] は、これを Y と Z の x での intersection multiplicity と定義した。

intersection multiplicity は点 x の近くの状況で決まるので、局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ 上の何らかの不変量として記述できるのは非常に自然なことである。しかし、これがすぐに intersection multiplicity に見える人は、まずいないであろう。

何故、これが intersection multiplicity を表しているのか？

以下、３つの理由 (状況証拠) をあげる。

理由１　代数的な intersection multiplicity と聞いて、まず最初に思い浮かぶのは、平面曲線のベズーの定理であろう。よって、最初に、平面曲線の場合にみてみる。

$X=\mathbb{C}^2$ とし、$Y=\{f=0\}$, $Z=\{g=0\}$ とする。ここで、$f,g\in\mathbb{C}[t_1,t_2]$ は、同伴でない既約多項式とする。このとき、$Y\cap Z$ は有限集合である。$x:=(0,0)\in Y\cap Z$ としよう。

$R:=\mathbb{C}[t_1,t_2]_{(t_1,t_2)}$ とする。f, g は正則列であるので、

$$\begin{aligned}&\left[0\to R\xrightarrow{f}R\to R/(f)\to 0\right]\otimes_R R/(g)\\ =\ \ &0\to R/(g)\xrightarrow{f}R/(g)\to R/(f,g)\to 0\end{aligned}$$

は、完全列である。よって、

$$\mathrm{Tor}_i^R(R/(f),R/(g))=\begin{cases}R/(f,g) & (i=0)\\ 0 & (i>0)\end{cases}$$

となるので、

$$\chi_R(R/(f),R/(g))=\ell_R(\mathrm{Tor}_0^R(R/(f),R/(g)))=\ell_R(R/(f,g))$$

である。つまり、Serre によって定義された intersection multiplicity は、ベズーの定理の中で使われる intersection multiplicity と一致する。

このケースでは、Tor の長さの交代和は、実は単に、

$$\mathrm{Tor}_0^R(R/I_Y,R/I_Z)=R/I_Y\otimes_R R/I_Z=R/(I_Y+I_Z)$$

の長さと一致している。(ここで、I_Y, I_Z は、それぞれ Y, Z の定義イデアルである。) intersection multiplicity を考えるとき、本当に高次の Tor が関係するのだろうか？Tor_0 だけでけでは、不十分なのだろうか？それは、Remark 3.3 の中でわかる。

理由 2　ここでは、もとの状況に戻して考える。つまり、$X=\mathbb{C}^n$、Y, Z は X の閉部分多様体、x は $Y\cap Z$ の孤立点であるとする。

ここで、$\underline{\epsilon}\in\mathbb{C}^n$ に対して、

$$Y_{\underline{\epsilon}} := \{\underline{y}+\underline{\epsilon} \mid \underline{y}\in Y\}$$

とする。このとき、Weil の定理 (例えば、[23] の 118p の A8)、Auslander-Buchsbaum [1], Serre [31] の定理を使って、

$$\chi_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Y,x},\mathcal{O}_{Z,x}) = {}^{\#}(Y_{\underline{\epsilon}}\cap Z\cap U) \tag{1}$$

が証明できる [1]。ここで、U は (古典位相での) x の $\mathbb{C}^n$ の中での十分に小さな開近傍とする。また、$\underline{\epsilon}=(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in\mathbb{C}^n$ は (古典位相で) $\underline{0}=(0,\ldots,0)$ に十分近い点で、(Zariski 位相で) 一般的な点であるとする。

つまり、式 (1) の右辺は、U と $\underline{\epsilon}$ の取り方によらないのである。${}^{\#}(Y_{\underline{\epsilon}}\cap Z\cap U)$ を、Y と Z の x での intersection multiplicity と考えるのは、非常に自然なことである。

例えば、$X=\mathbb{C}^2$、$Y=\{t_2-t_1^2=0\}$, $Z=\{t_2=0\}$ とする。つまり、放物線 Y と直線 Z が $(0,0)$ で接している。すると、放物線を一般的な方向にわずかにずらすと二点で交わるので、intersection multiplicity は 2 になるわけである。

理由 3　W はネーター・スキームとする。$\mathrm{K}_0(W)$ は、W 上の vector bundle の Grothendieck group、$\mathrm{G}_0(W)$ は、W 上の coherent sheaf の Grothendieck group とする。このとき、自然な射 $\mathrm{K}_0(W)\longrightarrow\mathrm{G}_0(W)$ は、W が正則スキームのとき同型になる。(W 上の coherent shaef に対して、W 上の vector bundle での分解を考えて、その交代和をとることによって逆射が定義できる。)

$\mathrm{K}_0(W)$ は、テンソル積を積として、可換環の構造を持つ。よって、W が正則スキームのときは、$\mathrm{G}_0(W)$ も環の構造を持つ。W 上の coherent sheaf $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ の積を考えよう。

$$\mathcal{E}. \ : \quad 0\to\mathcal{E}_r\to\cdots\to\mathcal{E}_0\to\mathcal{F}\to 0$$

は完全列で、$\mathcal{E}_0$, $\ldots$, $\mathcal{E}_r$ は W 上の vector bundle であるとする。$\mathcal{E}.'$ も同様に定義する。

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{K}_0(W) & \longrightarrow & \mathrm{G}_0(W) \\
\sum_i(-1)^i[\mathcal{E}_i] & \longmapsto & [\mathcal{F}] \\
\sum_j(-1)^j[\mathcal{E}'_j] & \longmapsto & [\mathcal{F}'] \\
(\sum_i(-1)^i[\mathcal{E}_i])\times\left(\sum_j(-1)^j[\mathcal{E}'_j]\right) & \longmapsto & [\mathcal{F}]\times[\mathcal{F}'] \\
\sum_{i,j}(-1)^{i+j}[\mathcal{E}_i\otimes\mathcal{E}'_j] & \longmapsto & \sum_k(-1)^k[Tor_k^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F}')]
\end{array}$$

このように、$\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ の積として、自然に Tor の交代和が出てくる。実は、上の積は、$\mathrm{G}_0(\mathrm{Supp}(\mathcal{F})\cap\mathrm{Supp}(\mathcal{F}'))$ で決まるのである。上の積の $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})\cap\mathrm{Supp}(\mathcal{F}')$ の各既約成分の係数として、Tor の長さの交代和が出てくるのである。

以上の 3 つの理由から、一般の正則スキームにおいても、Tor の長さの交代和を intersection multiplicity と定義することは、非常に自然であると考えられる。

[1] 正確に言うと、Weil の定理を用いて、右辺と Chevalley によって定義された intersection multiplicity が等しいことを証明する。その後、パラメーターイデアルの Koszul 複体のホモロジーと重複度の関係を表す Auslander-Buchsbaum, Serre の公式を用いて、Chevalley によって定義された intersection multiplicity と左辺が等しいことを示す。

3 一般の正則スキーム上での intersection multiplicity と Serre 予想

前節では、$X = \mathbb{C}^n$ のケースで、一点で交わる二つの閉部分多様体の、その交点での intersection multiplicity が、Tor の長さの交代和で書けることを見た。

よって、次のように intersection multiplicity を定義することが自然である。

X を正則スキーム、Y, Z を X の integral 閉部分スキーム、W を $Y \cap Z$ の既約成分であるとする。このとき、Y と Z の W での intersection multiplicity を、

$$\chi_{\mathcal{O}_{X,W}}(\mathcal{O}_{Y,W}, \mathcal{O}_{Z,W}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \ell_{\mathcal{O}_{X,W}} \left(\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X,W}}(\mathcal{O}_{Y,W}, \mathcal{O}_{Z,W}) \right)$$

と定義する。($\chi_{\mathcal{O}_{X,W}}(\mathcal{O}_{Y,W}, \mathcal{O}_{Z,W})$ は整数であることに注意する。)

このとき、Serre [31] は、次を予想した。

Conjecture 3.1 (Serre 予想) 上の状況で、次が成立するだろう。

(1) $\mathrm{codim}_X Y + \mathrm{codim}_X Z \geq \mathrm{codim}_X W$

(2) $\chi_{\mathcal{O}_{X,W}}(\mathcal{O}_{Y,W}, \mathcal{O}_{Z,W}) \geq 0$.

(3) If $\mathrm{codim}_X Y + \mathrm{codim}_X Z > \mathrm{codim}_X W$, *then* $\chi_{\mathcal{O}_{X,W}}(\mathcal{O}_{Y,W}, \mathcal{O}_{Z,W}) = 0$.

(4) If $\mathrm{codim}_X Y + \mathrm{codim}_X Z = \mathrm{codim}_X W$, *then* $\chi_{\mathcal{O}_{X,W}}(\mathcal{O}_{Y,W}, \mathcal{O}_{Z,W}) > 0$.

上の (2) は non-negativity、(3) は vanishing、(4) は positivity と呼ばれている。

Remark 3.2 (1) の不等式は、X が非特異代数多様体の場合は、

$$\dim W \geq \dim Y + \dim Z - \dim X$$

を表している。$Y \cap Z$ の次元を下から評価する興味深い式である。

X は非特異代数多様体、W が一点の場合は、(1) の不等式は、

$$\dim Y + \dim Z \leq n$$

を表している。$X = \mathbb{C}^3$ の中で、Y と Z が共に直線であるときのように、本来交わる必要が無いのに交わっている場合、(3) によって intersection multiplicity は 0 になると考えられる。

以下、簡単のため、$\mathcal{O}_{X,W}$, $\mathcal{O}_{Y,W}$, $\mathcal{O}_{Z,W}$ をそれぞれ (R, m, k), R/P, R/Q とおく。R は正則局所環、P と Q は R の素イデアルで $m = \sqrt{P+Q}$ をみたす。考えたい intersection multiplicity は、

$$\chi_R(R/P, R/Q) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \ell_R \left(\mathrm{Tor}_i^R(R/P, R/Q) \right)$$

である。

現在までに、Serre 予想は、次のところまで解かれている。

(1) は、Serre [31] によって、証明された。

(2) は、Gabber [2] によって、証明された。この証明で重要な役割を果たしたのは、finite な拡大を許して非特異モデルの存在を証明した de Jong [12] の定理である。

(3) は、Roberts [26], Gillet-Soulé [8] によって独立に証明されている。Roberts は、localized Chern character, 特異リーマン・ロッホ定理などを使って証明した。Gillet-Soulé は、Adams operation を使っている。

上の Gabber の結果は代数幾何学の道具を使って得られたものであるのに対して、Roberts, Gillet-Soulé の証明は代数的 K-理論の手法を使ったものであると言ってよいであろう。

(2) における Gabber の方法を用いれば、(3) の別証明を与えることもできる。

(4) は、R が体を含む場合、または、R の剰余体の標数 p に対して $p \notin m^2$ が成立する場合は、Serre [31] によって肯定的に解かれている。(m は、R の極大イデアルである。)

Remark 3.3 R は体を含む正則局所環で、P と Q は R の素イデアルで $m = \sqrt{P+Q}$ をみたし、$\operatorname{ht} P + \operatorname{ht} Q = \dim R$ と仮定する。(X が非特異代数多様体、Y, Z は X の閉部分多様体で、W は $Y \cap Z$ の既約成分とする。さらに $R = \mathcal{O}_{X,W}$ とおき、P, Q はそれぞれ Y, Z の R の中での定義イデアルとする。このとき、$\operatorname{codim}_X Y + \operatorname{codim}_X Z = \operatorname{codim}_X W$ であることと、$\operatorname{ht} P + \operatorname{ht} Q = \dim R$ は同値である。) このとき、

$$1 \le e(R/P)e(R/Q) \le \chi_R(R/P, R/Q) \le \ell_R(R/P \otimes_R R/Q) = \ell_R(\operatorname{Tor}_0^R(R/P, R/Q))$$

が成立する[2]。ここで、$e(\ )$ は、重複度であるとする。上の式には3つの不等号がある。

- 一番左の不等号が等号になる必要十分条件は、$e(R/P) = e(R/Q) = 1$ である。これは、R/P, R/Q がともに正則局所環であることと同値である[3]。

- 真ん中の不等号が等号になる必要十分条件は、$\tilde{Y} \cap \tilde{Z} = \emptyset$ である (Fulton [7] の Corollary 12.4 参照)。ここで、$\tilde{X}$ は $\operatorname{Spec}(R)$ を m で blow-up したもの、$\tilde{Y}$ は $\operatorname{Spec}(R/P)$ の proper transform、$\tilde{Z}$ は $\operatorname{Spec}(R/Q)$ の proper transform とする。共通部分は、$\tilde{X}$ の中で考える。これは、$\operatorname{Spec}(R/P)$ と $\operatorname{Spec}(R/Q)$ は、点 m で共通の接線を持たないことを意味している[4]。これは、直感と合っている。

- 一番右の不等号が等号になる必要十分条件は、R/P, R/Q がともに Cohen-Macaulay 環であることである[5]。

  つまり、R/P, R/Q のどちらかが Cohen-Macaulay 環でない場合は、intersection multiplicity は $\ell_R(\operatorname{Tor}_0^R(R/P, R/Q))$ より真に小さくなってしまうのである。

[2] 体を含んでいない正則局所環 R 上では、一番左の不等式は明らかであるが、真ん中と右の不等式が成立するかどうかは、全くわかっていない。

[3] よって、これが等式にならない原因は、R/P と R/Q の個別の特異点の特異性にあるのである。

[4] これが、等式にならない原因は、R/P と R/Q の個別の性質によるのではなく、両者の位置関係にあるのである。例えば、直線と放物線が接している場合は、$e(R/P) = e(R/Q) = 1$, $\chi_R(R/P, R/Q) = 2$ である。

[5] よって、これが等式にならない原因は、R/P と R/Q の個別の特異点の特異性にあるのである。

平面曲線のベズーの定理のケースでは、R/P, R/Q がともに超平面 (とくに、Cohen-Macaulay 環) であるので、このケースでは $\ell_R(R/P \otimes_R R/Q)$ を考えるだけでよいのである。

- 更に、R が代数閉体上の形式的べき級数環であると仮定すれば、永田 [24] により、

$$\chi_R(R/P, R/Q) \leq e(P{\cdot}R/Q, R/Q)$$

であることが示されている。等号が成立することと、P が $\operatorname{ht} P$ 個の元で生成されることは同値である。

Serre 予想の (4) に関連して、次のようなものが定義された。

Definition 3.4 (R, m, k) はエクセレント・ネーター局所環であるとしよう。$M \neq 0$ は有限生成 R-加群で $\operatorname{depth}(M) = \dim R$ をみたすとき、M は、maximal Cohen-Macaulay R-加群であるという。

Definition 3.5 (R, m, k) は d 次元エクセレント・ネーター局所環であるとしよう。M は (有限生成とは限らない) R-加群で、

1. $i = 0, 1, \ldots, d-1$ に対して、x_{i+1} は $M/(x_1, \ldots, x_i)M$-非正則元。
2. $M/(x_1, \ldots, x_d)M \neq 0$。

をみたす $x_1, \ldots, x_d \in m$ が存在するとき、M は、big Cohen-Macaulay R-加群であるという。

maximal Cohen-Macaulay R-加群は big Cohen-Macaulay 加群である。

エクセレント・ネーター局所環は、必ず maximal (big) Cohen-Macaulay 加群を持つであろうというのが、Small (Big) Mac 予想である。

Small Mac 予想が正しければ、Serre 予想の (4) が正しいことがわかる (Grothendieck の方法)。しかし、Small Mac 予想には、非自明な結果が無く、否定的に考えている人が多いようである。

Big Mac 予想は、R が体を含む場合は正しく (Hochster [10])、また混合標数でも 3 次元以下であれば正しい (Heitmann [9], Hochster [11])。Big Mac 予想からは Serre 予想は従わないようであるが、Big Mac 予想が正しければいろいろな応用がある。

4 特異リーマン・ロッホ定理

ここでは、特異リーマン・ロッホ定理 (Fulton [7], 18 章) が、可換環論にどのように使えるかを見て、Roberts の vanishing theorem の証明を復習する。

S は正則スキームとする。$\mathcal{C}_S$ は S 上有限型のスキームのカテゴリーであるとする。

特異リーマン・ロッホ定理により、$X \in \mathcal{C}_S$ のとき、$\mathbb{Q}$-ベクトル空間の同型

$$\tau_{X/S} : \mathrm{G}_0(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{A}_*(X)_{\mathbb{Q}}$$

が存在する。

ここで、$\mathrm{G}_0(X)$ は、X 上の coherent sheaf の Grothendieck 群、$\mathrm{A}_*(X) = \oplus_i \mathrm{A}_i(X)$ は X の Chow 群である。ただし、

$$\mathrm{A}_i(X) = \bigoplus_{\dim Y = i} \mathbb{Z}[Y]/\text{有理同値}$$

とする。

Remark 4.1 X が k 上のスムーズ代数多様体であるとき、

$$\mathrm{K}_0(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}_0(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\tau_{X/\mathrm{Spec}(k)}} \mathrm{A}_*(X)_{\mathbb{Q}}$$

という同型の列があるが、この合成により、

$$[\mathcal{E}] \mapsto \mathrm{td}(\Omega_{X/\mathrm{Spec}(k)}) \cdot \mathrm{ch}(\mathcal{E})$$

となる。ここで、td は vector bundle の Todd class、ch は Chern character である。この写像は、環の同型である Chern character 写像とは、異なることに注意しよう。

以下、この節では、T は正則局所環、(R, m) は d 次元の局所環で、R は T の像であるとする。すると、自然な射 $\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(T)$ は閉埋め込みで、特に有限型の射である。よって、特異 Riemann-Roch 定理により、

$$\tau_{\mathrm{Spec}(R)/\mathrm{Spec}(T)} : \mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{A}_*(R)_{\mathbb{Q}}$$

という射が誘導される。この射を、簡単のため τ_R と表す。

Remark 4.2 写像 τ_R は、T と R によって決まる。しかし、次のいずれかの場合は、写像 τ_R は R だけで決まり、T にはよらない。

- R は完備局所環。
- R は、体または $\mathbb{Z}$ 上本質的有限型。

ただし、一般の $X \in \mathcal{C}_S$ に対しては、$\tau_{X/S}$ が S の取り方で変わってしまう例はたくさんある。(例えば、$\tau_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/\mathrm{Spec}(\mathbb{C})} \neq \tau_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}/\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}$ である。)

ここで、

$$\tau_R(R) = q_d + q_{d-1} + \cdots + q_0$$

とおく。ただし、$q_i \in \mathrm{A}_i(R)_{\mathbb{Q}}$ である。これは、しばしば環 R の *todd class* と呼ばれる。

Remark 4.3 局所環 R の todd class は、次をみたす。

1. $q_d = [\mathrm{Spec}(R)] \neq 0$.

2. R が完全交叉であるとき、$i < d$ に対して $q_i = 0$ が成立する。

3. R が Cohen-Macaulay 環であるとき、

$$\tau_R(\omega_R) = q_d - q_{d-1} + q_{d-2} - \cdots$$

が成立する。

4. R が Gorenstein 環であるとき、各奇数 i に対して $q_{d-i} = 0$ が成立する。

5. R が整閉整域のとき、各高さ 1 の素イデアル P に対して、$[\mathrm{Spec}(R/P)] \in \mathrm{A}_{d-1}(R)$ と $-\mathrm{cl}(P) \in \mathrm{Cl}(R)$ を同一視することによって $\mathrm{A}_{d-1}(R) = \mathrm{Cl}(R)$ となる。このとき、$\mathrm{A}_{d-1}(R)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Cl}(R)_{\mathbb{Q}}$ の中で、$q_{d-1} = -\frac{\mathrm{cl}(\omega_R)}{2}$ が成立する。

Example 4.4 k は体とする。m, n は、$2 \leq n \leq m$ を充たす自然数であるとする。

$$R = k[x_{ij} \mid i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m]_{(\underline{x})}/I_2(x_{ij})$$

としよう。ここで、$I_2(x_{ij})$ は、$n \times m$ 行列 (x_{ij}) の 2 次小行列式全体で生成されたイデアルとする。このとき、$d = n + m - 1$ である。

すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_*(R)_{\mathbb{Q}} &= \mathbb{Q}[a]/(a^n) \\ \mathrm{A}_{d-i}(R)_{\mathbb{Q}} &= \mathbb{Q}a^i \quad (i \geq 0) \end{aligned}$$

が成立する。このとき、

$$\begin{aligned} \tau_R(R) &= \left(\frac{a}{1-e^{-a}}\right)^n \left(\frac{-a}{1-e^{a}}\right)^m \\ &= 1 + \frac{n-m}{2}a + \frac{3n^2+3m^2-6nm-n-m}{24}a^2 + \cdots \\ &= q_d + q_{d-1} + q_{d-2} + \cdots \end{aligned}$$

が成立する ([14])。よって、$m \neq n$ なら $q_{d-1} \neq 0$ である。また、$m = n \geq 3$ であれば、$q_{d-1} = 0$, $q_{d-2} \neq 0$ である [6] 。

以下、$C(R)$ は、有限生成 R-加群の有界な鎖複体 $\mathbb{F}.$ で、任意の i に対して $\ell_R(H_i(\mathbb{F}.)) < \infty$ を充たすものからなるカテゴリーであるとする。

例えば、環 R のパラメーターによって定まる Koszul 複体は、代表的な $C(R)$ の元である。

[6] この環は、Cohen-Macaulay 環であり、Gorenstein 環である必要十分条件は $m = n$、完全交叉である必要十分条件は $m = n = 2$ である。

このとき、$\mathbb{F}. \in C(R)$ に対して、

$$\begin{array}{rcl} \chi_{\mathbb{F}.} & : & \mathrm{G}_0(R) \longrightarrow \mathbb{Z} \\ & & [M] \mapsto \sum_i (-1)^i \ell_R(H_i(\mathbb{F}. \otimes_R M)) \end{array} \tag{2}$$

が、well-defined に定まる。以下、$\chi_{\mathbb{F}.}([M])$ を単に $\chi_{\mathbb{F}.}(M)$ と書く。

鎖複体 $\mathbb{F}.$ の Localized Chern character $\mathrm{ch}(\mathbb{F}.)$ は、下の図式を可換にする唯一つの射である。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_R} & \mathrm{A}_*(R)_{\mathbb{Q}} \\ \chi_{\mathbb{F}.} \downarrow & & \downarrow \mathrm{ch}(\mathbb{F}.) \\ \mathbb{Q} & = & \mathbb{Q} \end{array}$$

以上の準備のもとに、Roberts の vanishing theorem の証明 [26] を思い出そう。

R はネーター局所環、M, N は有限生成 R-加群で $\mathrm{pd}_R M < \infty$, $\mathrm{pd}_R N < \infty$, $\ell_R(M \otimes_R N) < \infty$ を充たすとする。

$\mathbb{G}.$, $\mathbb{H}.$ は、それぞれ M と N の R-自由分解とする。このとき、$\mathbb{G}. \otimes \mathbb{H}. \in C(R)$ である。$\chi_R(M, N) = \chi_{\mathbb{G}.\otimes\mathbb{H}.}(R)$ に注意する。上の図式の可換性により、

$$\chi_{\mathbb{G}.\otimes\mathbb{H}.}(R) = \mathrm{ch}(\mathbb{G}. \otimes \mathbb{H}.)\,(\tau_R(R)) = \mathrm{ch}(\mathbb{G}. \otimes \mathbb{H}.)\,(q_d) + \sum_{i=0}^{d-1} \mathrm{ch}(\mathbb{G}. \otimes \mathbb{H}.)\,(q_i) \tag{3}$$

が成立する。

Roberts は、この状況で次のことを示している。

$$\dim M + \dim N < d \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ch}(\mathbb{G}. \otimes \mathbb{H}.)\,(q_d) = 0$$

この証明には、localized Chern character は、勝手な bivariant class と可換であるという事実 [27] が使われる。

ここで、R は完全交叉であるとしよう。このとき、Remark 4.3 (2) により $\tau_R(R) = q_d$ である。よって、式 (3) より直ちに $\chi_R(M, N) = 0$ が従う。 **q.e.d.**

Roberts の証明を見ていると、次の二つのことが重要であることに気付く。

Question 4.5 いつ $\tau_R(R) = q_d$ が起こるか？

Question 4.6 $\mathbb{F}. \in C(R)$ と $\alpha \in \mathrm{A}_i(R)$ に対して、$i < d$ のとき $\mathrm{ch}(\mathbb{F}.)\,(\alpha) = 0$ が成立するか？

ここでは、Question 4.6 を generalized vanishing 予想ということにする。次の節で見るが、generalized vanishing 予想には反例がある。

Remark 4.7 Question 4.5 について解説する。

$\tau_R(R) = q_d$ を充たす環を Roberts 環 [16] ということにする。

Remark 4.3 (2) により、完全交叉は Roberts 環である。

Remark 4.3 (5) により、Roberts 環が正規であれば、$\mathbb{Q}$-Gorenstein である。

Example 4.4 の環は $m = n \geq 3$ のとき、完全交叉でない Gorenstein 環である。これらの環では、$q_{d-2} \neq 0$ である。よって、Gorenstein 環は Roberts 環であるとは限らない。

$R \to A$ が finite な単射で A が正則環であれば、R は Roberts 環である。

T がエクセレント正則局所環、L は $Q(T)$ の有限次ガロア拡大であるとする。R は、T の L における整閉包をある素イデアルで局所化した局所環とする。このとき、R は Roberts 環である。(拡大 $L/Q(T)$ がガロア拡大でないときは、必ずしも成立しない。)

R は標数 $p > 0$ の局所環であり、剰余体は代数閉体、フロベニウス写像 $F^e : R \to {}^eR$ は finite であると仮定する (ただし、$F^e(x) = x^{p^e}$ とする)。このとき、R は Roberts 環であるための必要十分条件は、任意の (ある) $e > 0$ に対して

$$[{}^eR] = p^{de}[R]$$

が $\mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}}$ で成立することである。

R が Roberts 環であれば、$\widehat{R}$ もそうである。しかし、$\widehat{R}$ が Roberts 環であっても R がそうとは限らない (Kamoi-Kurano [13], Kurano-Srinivas [20] 参照)。

5 Generalized vanishing 予想、局所環のサイクルの数値的同値

この節では、Question 4.6 について解説する。

この節でも引き続き、T は正則局所環、(R, m) は d 次元の局所環で、R は T の像であるとする。

$\mathbb{F}. \in C(R)$ とする。このとき、$d \geq k \geq 0$ を充たす整数 k に対して次は同値である。

(1) $\dim M \leq k$ を充たす任意の有限生成 R-加群 M に対して、$\chi_{\mathbb{F}.}(M) = 0$ となる。

(2) 任意の $\alpha \in \mathrm{A}_i(R)$ (ただし、$i \leq k$) に対して、$\mathrm{ch}(\mathbb{F}.)(\alpha) = 0$ が成立する。

このことから、generalized vanishing 予想 (Question 4.6) は、次のように言い換えることができる。

- $\dim M < d$ を充たす任意の有限生成 R-加群 M に対して、$\chi_{\mathbb{F}.}(M) = 0$ となるか？

Remark 5.1 generalized vanishing 予想について、重要なことをここでまとめる。

(1) R 自身が正則局所環であるときは、generalized vanishing 予想が成立することは、簡単にわかる。

(2) R は、正則局所環 T の準同型像であり、T-自由な鎖複体 $\mathbb{G}.$ で $\mathbb{F}. = \mathbb{G}. \otimes_T R \in C(R)$ を充たすものが存在するとしよう。(つまり、$\mathbb{F}. \in C(R)$ は、正則局所環 T にリフトする。)

このときも、generalized vanishing 予想は正しい。(Roberts による localized Chern character の commutativity [27] と、それを用いて示される正則スキーム上でのある localized Chern character の vanishing [26] を用いて証明できる。)

(3) $d > \dim M = 0$ のケースでは、$\chi_{\mathbb{F}.}(M) = 0$ は、簡単に証明できる。

(4) Foxby, Roberts [28] 任意の $P \in \mathrm{Min}(R)$ に対して、$\dim R/P \geq 2$ であると仮定する。このとき、$\dim M \leq 1$ を充たす任意の M に対して、$\chi_{\mathbb{F}.}(M) = 0$ が成立する。

(5) Dutta-Hochster-MacLaughlin [6], Levin [21] k は体、$R = k[x,y,z,w]_{(x,y,z,w)}/(xw - yz)$ とする。このとき、$\chi_{\mathbb{F}.}(R/(x,y)) = -1$ をみたす $\mathbb{F}. \in C(R)$ が存在する。($\dim R = 3 > 2 = \dim R/(x,y)$ に注意。よって、これは generalized vanishing 予想の反例となっている。)

ここで、$\mathbb{F}.$ は、下の 6×17 行列 A によって定まる R-線型写像

$$R^{17} \xrightarrow{A} R^6$$

の余核の自由分解である (余核は、長さが 15、射影次元が 3 の加群である)。

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 & x & 0 & 0 & y & -w & 0 & 0 & y & 0 & 0 \\
-y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 & x & 0 & 0 & 0 & -w & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 & x & 0 & xz & 0 & -w & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 & x & 0 & xz & 0 & -w & 0 & 0 \\
x & 0 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-w & 0 \\
0 & x & 0 & 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-w
\end{pmatrix}$$

(6) Miller-Singh [22] $d = 5$ 次元の局所環 R で、$\chi_{\mathbb{F}.}(M) \neq 0$ を充たす $\mathbb{F}. \in C(R)$ と M が存在する。ただし、$\dim M = 3$ である。

Dutta-Hochster-MacLaughlin の反例では、$R/(x,y)$ は余次元 1 であったのだが、Miller-Singh の例では M は余次元 2 である。また、この例から、$\mathrm{ch}(\mathbb{F}.)\,(q_{d-2}) \neq 0$ を充たす Gorenstein 環 R と複体 $\mathbb{F}. \in C(R)$ が構成できる。

(7) Roberts-Srinivas [30] generalized vanishing 予想の反例に幾何学的意味を与え、generalized vanishing 予想の反例が (非常に自然に) 多く存在することを示した。

(8) Piepmeyer-Roberts [25] (7) で与えられた幾何学的データから、generalized vanishing 予想の反例を与える複体 $\mathbb{F}.$ を具体的に構成する方法を見つけた [7] 。

Example 5.2 A は $\mathbb{C}$ 上の standard graded ring とする。(つまり、$A = \oplus_{n \geq 0} A_n$ は、ネーター次数環であり、$A_0 = \mathbb{C}$、$A = \mathbb{C}[A_1]$ を充たすもの。)

Proj(A) は、種数が正の非特異曲線であるとする。$R = A_{(A_1)}$ としよう。このとき、$d = 2$ で $\dim \mathrm{A}_1(R)_{\mathbb{Q}} = \infty$ である。しかし、任意の $\mathbb{F}. \in C(R)$ と任意の $\alpha \in \mathrm{A}_1(R)$ に対して $\mathrm{ch}(\mathbb{F}.)\,(\alpha) = 0$ が成立する (Remark 5.1 (4) を使う)。

上の例では、一次元のサイクルは沢山あるのだが、それらは localized Chern character $\mathrm{ch}(\mathbb{F}.)$ には全く影響しないのである。

よって、次のようなことを考えるのは、非常に自然であると思われる。

[7] Remark 5.6 (2) の記号で、$\gamma \in \mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}}$ が、$c_1(\mathcal{O}_X(1)) \cap \gamma = 0$ を充たすとき、$f(\alpha) = \gamma$ を充たす $\alpha \in C(R)$ を具体的に構成する方法を見つけた。

Definition 5.3 (1) 任意の $\mathbb{F}. \in C(R)$ に対して $\chi_{\mathbb{F}.}(\alpha) = 0$ が成立するとき、$\alpha \in \mathrm{G}_0(R)$ は 0 に数値的同値ということにして、$\alpha \sim_{\mathrm{num}} 0$ と書く。

$$N\mathrm{G}_0(R) = \{\alpha \in \mathrm{G}_0(R) \mid \alpha \sim_{\mathrm{num}} 0\}$$

と定義する。また、

$$\overline{\mathrm{G}_0(R)} = \mathrm{G}_0(R)/N\mathrm{G}_0(R)$$

とおく。

(2) 任意の $\mathbb{F}. \in C(R)$ に対して $\mathrm{ch}(\mathbb{F}.)(\alpha) = 0$ が成立するとき、$\alpha \in \mathrm{A}_*(R)$ は 0 に数値的同値ということにして、$\alpha \sim_{\mathrm{num}} 0$ と書く。

$$N\mathrm{A}_*(R) = \{\alpha \in \mathrm{A}_*(R) \mid \alpha \sim_{\mathrm{num}} 0\}$$

と定義する。また、

$$\overline{\mathrm{A}_*(R)} = \mathrm{A}_*(R)/N\mathrm{A}_*(R)$$

とおく。

Remark 5.4 (1) $\tau_R(N\mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}}) = N\mathrm{A}_*(R)_{\mathbb{Q}}$ は、簡単に証明できる。

(2) Gillet-Soulé [8] によって定義された Adams operation を用いることにより、

$$N\mathrm{A}_*(R) = \oplus_{i=0}^{d} N\mathrm{A}_i(R)$$

が成立する。ただし、$N\mathrm{A}_i(R) = N\mathrm{A}_*(R) \cap \mathrm{A}_i(R)$ とする。

(3) 上の (1) と (2) により、次の図式を可換にする写像 $\overline{\tau_R}$ がある。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{G}_0(R)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\tau_R} & \mathrm{A}_*(R)_{\mathbb{Q}} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\overline{\tau_R}} & \overline{\mathrm{A}_*(R)}_{\mathbb{Q}} & = & \oplus_{i=0}^{d}\overline{\mathrm{A}_i(R)}_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

このとき、次が証明される。

Theorem 5.5 (Kurano [17]) R は、次のどちらかを充たすエクセレント局所環とする。

1. $R \supset \mathbb{Q}$
2. R は、A 上本質的有限型。ただし A は、$\mathbb{Z}$, 体 または完備離散付値環。

このとき、$\overline{\mathrm{G}_0(R)}$ と $\overline{\mathrm{A}_*(R)}$ は、階数が等しい有限生成自由アーベル群である。

Remark 5.6 A は $\mathbb{C}$ 上の standard graded ring、$X = \mathrm{Proj}(A)$ は $\mathbb{C}$ 上スムーズ、$R = A_{(A_1)}$、$d = \dim R$ とおく。

(1) このとき、

$$\mathrm{rank}\overline{\mathrm{A}_{d-1}(R)} \leq \rho(X) - 1$$

が成立する。ここで、$\rho(X)$ は、X の Picard 数である。

X の Chow 環の、有理同値と数値的同値が一致すれば、上の不等式は等式になる。

(2) A の、A_+ でない斉次素イデアル P に対して、$[\mathrm{Proj}(A/P)] \mapsto [\mathrm{Spec}(R/PR)]$ とすることにより、

$$\mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{g} \mathrm{A}_*(R)_{\mathbb{Q}}$$

が定義できる。これは、全射である ([14])。

また、$\mathrm{Spec}(R)$ の m での blow-up を

$$Z \xrightarrow{\pi} \mathrm{Spec}(R)$$

とすると、$\pi^{-1}(m) \simeq X$ が成立する。ここで、複体 $\pi^*\mathbb{F}.$ のホモロジーのサポートは、X に入ることに注意する。よって、ホモロジーの交代和を取ることにより、

$$\chi(\pi^*\mathbb{F}.) := \sum_i (-1)^i \, [H_i(\pi^*\mathbb{F}.)] \in \mathrm{G}_0(X)$$

が定まる。X は、Z の閉部分スキームであるので、

$$\tau_{X/Z}\chi\pi^* : C(R) \longrightarrow \mathrm{A}_*(X)$$

が定まる。これにより誘導される射を

$$f : \mathrm{K}_0(C(R))_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}}$$

とおく。ただし、$\mathrm{K}_0(C(R))$ は、$C(R)$ の Grothendieck 群とする。このとき、

$$\mathrm{K}_0(C(R))_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{f} \mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{c_1(\mathcal{O}_X(1))} \mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} \tag{4}$$

は、完全列になる。(この完全性は、Thomason-Trobough [32] の代数的 K-群の localization sequence を用いて証明できる。)

Roberts-Srinivas [30] は、$\alpha \in \mathrm{K}_0(C(R))_{\mathbb{Q}}$ と $\beta \in \mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}}$ に対して、

$$\deg(f(\alpha) \times \beta) = \chi_\alpha(g(\beta))$$

が成立することを証明した。ここで、χ_α は、式 (2) の写像を $\alpha \in \mathrm{K}_0(C(R))_{\mathbb{Q}}$ に対して拡張して定義したものである。

このことを使えば、Dutta-Hochster-MacLauglin [6] の反例の存在が、次のように非常に簡単に理解できる。

$A = k[x, y, z, w]/(xw - yz)$, $R = A_{(x,y,z,w)}$ とおく。このとき、

$$\mathrm{CH}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[a, b]/(a^2, b^2)$$

が成立する。また、$c_1(\mathcal{O}_X(1)) = a+b$ である。すると、$(a+b)(a-b)=0$ であるので、式 (4) の完全性により $f(\alpha) = a-b$ を充たす $\alpha \in \mathrm{K}_0(C(R))_{\mathbb{Q}}$ が存在する。また、$\beta = a$ とおく。このとき、

$$\chi_\alpha(g(\beta)) = \deg(f(\alpha)\times\beta) = \deg(-ab) = -1$$

が成立する。

(3) $\mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{hom}}(X)$ はホモロジカル同値で割った X の Chow 環、$\mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)$ は数値的同値で割った X の Chow 環とする。

自然な射

$$\mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{hom}}(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{CH}^{\cdot}_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbb{Q}}$$

は、同型であることが期待される (スタンダード予想)。これは、$\dim X \leq 3$ または X がアーベル多様体の場合は正しいことがわかっている。また、有理同値と数値的同値が一致するようなケースでは、明らかに上の射も同型になる。

もし、X に対してスタンダード予想が正しければ、

$$\overline{\mathrm{A}_i(R)} = 0 \ \text{ for } i \leq d/2$$

が成立する。

このことは、任意の $\mathbb{F}. \in C(R)$ と $\dim M \leq d/2$ を充たす任意の有限生成 R-加群 M に対して、$\chi_{\mathbb{F}.}(M) = 0$ が成立することを意味している。

(4) A は、完全交叉としよう。このとき、$X(\mathbb{C})$ の特異コホモロジーをみることによって、次が証明される。

$d = \dim R$ が偶数のときは、

$$\overline{\mathrm{A}_i(R)} = 0 \ \text{ for } i < d$$

が成立する。すなわち、この場合は、generalized vanishing 予想は正しい。

$d = \dim R$ が奇数のときは、

$$\overline{\mathrm{A}_i(R)} = 0 \ \text{ for } i \neq \tfrac{d+1}{2}, d$$

が成立する。

Problem 5.7 (1) $C(R)$ の Grothendieck 群 $\mathrm{K}_0(C(R))$ にも自然に数値的同値を導入して、それで割って $\overline{\mathrm{K}_0(C(R))}$ を定義する。

これにより、二つの perfect pairing

$$\overline{\mathrm{K}_0(C(R))}_{\mathbb{Q}} \times \overline{\mathrm{G}_0(R)}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$$

$$\overline{\mathrm{K}_0(C(R))}_{\mathbb{Q}} \times \overline{\mathrm{A}_*(R)}_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$$

が定まる。

この pairing における positive element [8] を定義したい。

ここで、

$$C_d(R) = \{\mathbb{F}. \in C(R) \mid \mathbb{F}. : 0 \to F_d \to \cdots \to F_0 \to 0 \ \text{ is not exact}\}$$

とおこう。これが、positive element の候補である。

depth sensitivity という性質により、M が maximal Cohen-Macaulay module であれば、$\mathbb{F}. \in C_d(R)$ に対して、

$$\chi_{\mathbb{F}.}(M) > 0$$

が成立する。

これらを positive element として、cone theorem のような素晴らしいことが証明できないだろうか？

(2) R が Cohen-Macaulay 環でないときは、maximal Cohen-Macaulay module の存在はほとんど期待できない。それに代わる positive element はないか？

ここで、次の予想をみてみよう。

Conjecture 5.8 $\mathbb{F}. \in C_d(R)$ のとき、$\mathrm{ch}(\mathbb{F}.)([\mathrm{Spec}(R)]) > 0$ が成立するであろう。

これは、R が体を含む場合は正しい (正標数の場合は Roberts [29] [9] 、標数 0 の場合は Kurano-Roberts [18])。R が混合標数の場合は未解決である。

これが、何かの positivity の理論の一部なのではないかと思う。

この conjecture が意味する positivity と、(1) の中で見た maximal Cohen-Macaulay 加群による positivity は、何か関係があるのか？(その関係を説明するために、test module [15] というものを定義して性質を調べたが、満足のゆく説明は完成していない。)

上の予想は、非常にわかりにくい。一つの理由は、複体の localized Chern character が何なのか、よくわからないからだと思う。しかし、localized Chern character を使わないで、上の予想を記述することは可能である。

つまり、Conjecture 5.8 は、次と同値である。

Conjecture 5.9 S は、完備な正則局所環、L は S の商体の有限次ガロア拡大であるとする。R は、S の L 内での整閉包であるとする。$\mathbb{F}. \in C_d(R)$ のとき、$\chi_{\mathbb{F}.}(R) > 0$ が成立するであろう。

[8] つまり、スムーズな 3 次元射影多様体の因子と閉部分曲線には、グローバルな交点数を考えることによって pairing ができ、数値的同値でわって perfect な pairing ができる。そこには、effective, nef, semi-ample, ample 等いろいろな positive element の概念がある。そのことが、理論を深いものにしており、そのことから cone theorem などの素晴らしい結果が導かれている。

[9] 上の予想を R が正標数の体を含む場合に解いて、それを用いて混合標数の New intersection theorem が証明できる。

これも、R が体を含む場合は正しい。L がガロア拡大 (つまり、R は Roberts 環) であるというのが本質的な条件であり、これをはずすと反例がある。

(3) 一般に、$i \le d/2$ のとき、$\overline{\mathrm{A}_i(R)} = 0$ が成立しないだろうか？(スタンダード予想が正しければ、R が $\mathbb{C}$ 上スムーズな射影多様体のアフィン・コーンの場合は正しい。)

(4) R はネーター正規局所環であるとする。このとき、Danilov [4], [5] は、自然な射

$$Cl(R) \longrightarrow Cl(R[[x]])$$

が同型であるとき、R は**離散的な因子類群を持つ**と定義した。

このとき、次のような 4 通りの因子類群の離散性が定義できる。

(離散 1) R は、Danilov の意味で、離散的な因子類群を持つ。

(離散 2) 自然な射 $Cl(R) \longrightarrow Cl(\widehat{R})$ は同型である。

(離散 3) $Cl(R)$ は有限生成アーベル群である。

(離散 4) $N\mathrm{A}_{d-1}(R) = 0$ である。

この 4 種類の離散性の関係が知りたい。

以下、R は、$\mathbb{C}$ 上スムーズな射影多様体 X のアフィン・コーンの原点の局所環であるとする。(projectively normal な ample line bundle での埋め込みを考え、R は整閉整域にしておく。) このとき、次が成立する。

- (離散 1) は、$H^1(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ for $n \ge 0$ と同値。
- (離散 2) は、$H^1(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ for $n > 0$ と同値。
- (離散 3) は、$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ と同値。

(最初の二つは Danilov [4], [5] による。三つ目は有名な結果である。) よって、

$$(\text{離散 } 1) = (\text{離散 } 2) + (\text{離散 } 3)$$

である。また、Theorem 5.5 により、

$$(\text{離散 } 4) \Longrightarrow (\text{離散 } 3)$$

がいえる。(離散 2) であるが (離散 1) でない例は、簡単に作ることができる。[19] の中で、(離散 3) であるが (離散 1) でない例が構成されている。

参考文献

[1] M. Auslander and D. Buchsbaum, *Codimension and multiplicity*, Ann. Math. **68** (1958), 625–657. Errata, ibid. **70** (1959), 395–397.

[2] P. Berthelot, *Altérations de variétés algébriques [d'aprés A. J. de Jong]*, Sém. Bourbaki **48** 1995/96 No. 815.

[3] C. Chevalley, *Intersections of algebraic and algebroid varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), 1–85.

[4] V. I. Danilov, *The group of ideal classes of a completed ring*, Math. USSR Sbornik **6** (1968), 493–500.

[5] V. I. Danilov, *Rings with a discrete group of divisor classes*, Math. USSR Sbornik **12** (1970), 368–386.

[6] S. P. Dutta, M. Hochster and J. E. MacLaughlin, *Modules of finite projective dimension with negative intersection multiplicities*, Invent. Math. **79** (1985), 253–291.

[7] W. Fulton, *Intersection Theory, 2nd Edition*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1997.

[8] H. Gillet and C. Soulé, *Intersection theory using Adams operation*, Invent. Math. **90** (1987), 243–277.

[9] R. C. Heitmann, *The direct summand conjecture in dimension three*, Ann. Math. **156** (2002), 695–712.

[10] M. Hochster, *Topics in the homological theory of modules over commutative rings*, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 24. Providence, R.I., 1975.

[11] M. Hochster, *Big Cohen-Macaulay algebras in dimension three via Heitmann's theorem*, J. Algebra **254** (2002), 395–408.

[12] A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. IHES **83** (1996), 51–93.

[13] Y. Kamoi and K. Kurano, *On maps of Grothendieck groups induced by completion*, J. Algebra **254** (2002), 21–43.

[14] K. Kurano, *A remark on the Riemann-Roch formula for affine schemes associated with Noetherian local rings*, Tohoku Math. J. **48** (1996), 121–138.

[15] K. Kurano, *Test modules to calculate Dutta Multiplicities*, J. Algebra **236** (2001), 216-235.

[16] K. Kurano, *On Roberts rings*, J. Math. Soc. Japan. **53** (2001), 333–355.

[17] K. Kurano, *Numerical equivalence defined on Chow groups of Noetherian local rings*, Invent. Math., **157** (2004), 575-619.

[18] K. Kurano and P. C. Roberts, *Adams operations, localized Chern characters, and the positivity of Dutta multiplicity in characteristic 0*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 3103–3116.

[19] K. Kurano, E.-i. Sato, A. K. Singh and K.-i. Watanabe, *Multigraded rings, diagonal subalgebras, and rational singularities*, in preparation.

[20] K. Kurano and V. Srinivas, *A local ring such that the map between Grothendieck groups with rational coefficient induced by completion is not injective*, preprint, arXiv math AC/07070547.

[21] M. Levine, *Localization on singular varieties*, Invent. Math. **91** (1988), 423–464.

[22] C. M. Miller and A. K. Singh, *Intersection multiplicities over Gorenstein rings*, Math. Ann. **317** (2000), 155–171.

[23] D. Mumford, *Algebraic geometry I, Complex projective varieties*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 221. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[24] M. Nagata, *Note on intersection multiplicity of proper components of algebraic or algebroid varieties*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math. **28**, (1954). 279–281.

[25] G. Piepmeyer and P. C. Roberts, *Constructing modules of finite projective dimension with prescribed intersectionmultiplicities*, J. Algebra *294* (2005), 569–589.

[26] P. C. Roberts, *The vanishing of intersection multiplicities and perfect complexes*, Bull. Amer. Math. Soc. **13** (1985), 127–130.

[27] P. C. Roberts, *Local Chern characters and intersection multiplicities*, Proc. of Symposia in Pure Math., **46** (1987), 389–400.

[28] P. C. Roberts, *MacRae invariant and the first local chern character*, Trans. Amer. Math. Soc., **300** (1987), 583–591.

[29] P. C. Roberts, *Intersection theorems*, Commutative algebra (Berkeley, CA, 1987), 417–436, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 15, Springer, New York, 1989.

[30] P. C. Roberts and V. Srinivas, *Modules of finite length and finite projective dimension*, Invent. Math., **151** (2003), 1–27

[31] J.-P. Serre, *Algèbre locale, Multiplicités*, Lecture Notes in Math. 11, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1965.

[32] R. W. Thomason and T. Trobaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, “The Grothendieck Festschrift”, Vol. III, 247–435, Progr. Math., 88, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1990.

Department of Mathematics
Meiji University
Higashi-Mita 1-1-1, Tama-ku,
Kawasaki 214-8571, Japan
kurano@math.meiji.ac.jp
http://www.math.meiji.ac.jp/~kurano