Deformations of nilpotent cones and Springer correspondeces*

加藤　周[†‡]

October 15, 2007

Abstract

この論説では Weyl 群のいわゆる Macdonald 表現と Springer 表現の復習をした後にそれらの間の対応を群が C 型の場合に我々の exotic 版 Springer 表現を仲立ちにすることによって与える。違う言い方で言うと、論文 [K07a] の内容の大雑把な解説をします。

1　記号の準備

$\mathbb{Z}$ 上定義された概型 $\mathcal{X}$ と体 $\Bbbk$ に対して特殊化を $\mathcal{X}_\Bbbk$ とおく。G を $\mathbb{Z}$ 上定義された分裂型 Chevalley 群とする。分裂型という仮定より $\mathbb{Z}$ 上定義された部分群概型の組 $B \supset T$ であって任意の体 $\Bbbk$ に対して特殊化 $B_\Bbbk \supset T_\Bbbk$ が各々$G_\Bbbk$ の Borel 部分群と極大トーラスの組になるようなものが存在する。また、N を B の部分群で $N_\Bbbk \subset B_\Bbbk$ が常に極大冪単部分群となるものとする。一般に $\mathbb{Z}$ 上定義された代数群 H の Lie 代数、つまり各 $\mathfrak{h}_\Bbbk$ が $H_\Bbbk$ の Lie 代数になるような $\mathbb{Z}$-加群、を $\mathfrak{h}$ とおく。また、$\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ とする。このとき、T の指標群 $X^*(T)$、余指標群 $X_*(T)$ を

$$X^*(T) := \mathrm{Hom}_{gr}(T, \mathbb{G}_m), \text{ and } X_*(T) := \mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{G}_m, T)$$

とおく。$\mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]$ を $\mathfrak{t}_0$ の $\mathbb{C}$ 上の代数多様体としての座標環とする。また非負整数 $m \geq 0$ に対して $\mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]_m$ で $\mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]$ の次数 m 部分を表す。そのとき自然な埋め込み

$$X^*(T) \cong \mathrm{Hom}_{gr}(T_\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times) \hookrightarrow \mathfrak{t}^* \subset \mathbb{C}[\mathfrak{t}]$$

が存在する。ここで、(G,T) の Weyl 群 $W := N_G(T)/T$ は上の図式の全ての項に自然に作用する。R を組 (G,T) に付随したルート系 ($\subset X^*(T)$)、R^+ を組 (B,T) に付随して決まるその部分集合 (正ルート系) とする。このとき、R^+ が定める R の単純ルートを $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ とし、$s_1, \ldots, s_r$ を各々に対応する W の単純鏡映とする。また、一般の元 $\alpha \in R$ に対して対応する W の鏡映を s_α とおく。

---

*元々の講演題目は "Macdonald representations and exotic Springer fibers" で、実際に関係もあるのですがここでは主定理を計画から変更した事にあわせて題名を微妙に変えさせていただきます

†京都大学数理解析研究所

‡kato@kurims.kyoto-u.ac.jp

2 Macdonald 表現

この節では基本的にはルート系しか扱わない。

Definition 2.1 (部分ルート系)**.** 部分集合 $R' \subset R$ が R の部分ルート系であるとは、W の部分群

$$W(R') := \langle s_\alpha ; \alpha \in R' \rangle$$

が R' を保つ事。

部分集合 $R' \subset R$ に対して、多項式を

$$\sigma(R') := \prod_{\alpha \in R' \cap R^+} \alpha \in \mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]$$

のように定める。また、$\sigma(R')$ を含む $\mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]$ の最小の W-部分加群を $L(R')$ と表す事にする。W の作用は各 $\mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]_m$ を保つ事より、ある非負整数 $m(R')$ が存在して

$$L(R') \subset \mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]_{m(R')}$$

が成立する。

Theorem 2.2 (Macdonald)**.** *1.* *任意の部分ルート系 $R' \subset R$ に対して $L(R')$ は既約 W 加群;*

2. *任意の部分ルート系 $R' \subset R$ に対して*

$$\dim \mathrm{Hom}_W(L(R'), \mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]_m) = \begin{cases} 1 & (m = m(R')) \\ 0 & (m < m(R')) \end{cases};$$

3. *ルート系 R の単純成分が全て $\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n, \mathbf{F}_4,$ または $\mathbf{G}_2$ のうちのどれかであるとする。任意の既約 W 加群 L に対してある部分ルート系 $R' \subset R$ が存在して W 加群として*

$$L \cong L(R')$$

が成立する。

Example 2.3 ($R = \mathbf{D}_4$)*.* $R = \{\pm e_i \pm e_j\}_{1 \le i \ne j \le 4}$、$W \cong \mathfrak{S}_3 \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ が成立する。このとき、W の部分ルート系 R' の共役類全体の集合は 10 個だが、W の既約表現は 11 個ある。特に、

$$L_{\mathtt{sp}} := \mathbb{C}[W]\left(e_4 \prod_{1 \le i < j \le 3} (e_i^2 - e_j^2)\right) \subset \mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]_7$$

で与えられる表現は Macdonald 表現としては得られない。

3 Springer 表現の Joseph 実現

$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とし、その部分多様体 $\mathcal{N}$ を次で定める:

$$\mathcal{N} := \{x \in \mathfrak{g}; f(x) = 0, \forall f \in \mathbb{Z}[\mathfrak{g}]_+^G\}.$$

ここで $\mathbb{Z}[\mathfrak{g}]_+ \subset \mathbb{Z}[\mathfrak{g}]$ は $\mathbb{Z}$-加群としての原点に対応する極大イデアル、上付き添字 G は自然な G-作用による不変部分を表す。ここで、$\mathcal{N}$ を $\mathbb{Z}$ 上のスキームと見なす。

Definition 3.1 (軌道多様体)**.** $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ の $G_{\mathbb{C}}$-軌道とする。これは $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ の局所閉集合である。このとき交叉[1]集合 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ の既約成分 $\mathfrak{X}$ を軌道多様体と呼ぶ。また、各 $G_{\mathbb{C}}$-軌道 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ に対してその軌道多様体の集合を $\mathsf{Orb}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ で表す。

さて、軌道多様体は $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ の部分多様体であり、しかも定義より $T_{\mathbb{C}}$-作用について安定である事が直ちに従う。従って $K^{T_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$ を $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ の $T_{\mathbb{C}}$-同変連接層の圏の Grothendieck 群とすると、各 $G_{\mathbb{C}}$-軌道 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ に対して

$$\mathsf{c} : \mathsf{Orb}\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \ni \mathfrak{X} \mapsto [\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}] \in K^{T_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$$

という写像が決まる[2]。

さて、良く知られているように $K^{T_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) \cong R(T_{\mathbb{C}})$ が成立している。従って $1 \in T_{\mathbb{C}}$ の近傍における形式的冪級数を取る写像

$$\mathsf{fx} : R(T_{\mathbb{C}}) \ni e^{\lambda} \mapsto \sum_{m \geq 0} \frac{\lambda^n}{m!} \in \mathbb{C}[[\mathfrak{t}_0]]$$

を考える。すると、さっきの写像 c と合成して

$$\mathsf{fx} \circ \mathsf{c} : \mathsf{Orb}\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \ni \mathfrak{X} \mapsto P_{\mathfrak{X}} \in \mathbb{C}[[\mathfrak{t}_0]]$$

が定まる。このとき、$P_{\mathfrak{X}}$ を $\mathfrak{t}_0^*$ を 1 次式の空間と見なして展開したときの非零な最低次数部分の項を $p_{\mathfrak{X}}$ と表し、特性多項式、もしくは Joseph 多項式と呼ぶ。これは定義より斉次式である。

Theorem 3.2 (堀田, Joseph, Rossmann, Spaltenstein, Springer [Spr76, Jos89, CG97])**.** $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ の $G_{\mathbb{C}}$-軌道とする

1. $\mathsf{Orb}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ の元の次元は全て互いに等しい*;*

2. 全ての $\mathfrak{X} \in \mathsf{Orb}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ に対して

$$\deg p_{\mathfrak{X}} := \frac{1}{2}\left(\dim \mathcal{N}_{\mathbb{C}} - \dim \mathcal{O}_{\mathbb{C}}\right);$$

3. $\{p_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \in \mathsf{Orb}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}\}$ は一時独立な $\mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]$ の部分集合*;*

---

[1] ここでの交叉は通常多様体としての交叉、すなわち閉点集合が共通部分となるようなスキームの reduced induced structure を考える。

[2] 一般に $T_{\mathbb{C}}$-同変な連接層に対して $T_{\mathbb{C}}$ の指標をテンソル積するという作用によって $T_{\mathbb{C}}$-同変連接層をさまざまな異なる $T_{\mathbb{C}}$-同変連接層と思い直す事が可能である。ここでは $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ が $\mathcal{O}_{\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}}$ の商である事を用いて自然な $T_{\mathbb{C}}$-作用を誘導している。

4. $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}$ の $G_{\mathbb{C}}$-軌道とした時

$$L_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}} := \sum_{\mathfrak{Y} \in \mathsf{Orb}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}} \mathbb{C} p_{\mathfrak{Y}}$$

は $\mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]$ から誘導された既約 W-加群の構造を持つ;

5. *2* つの $G_{\mathbb{C}}$-軌道 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}'_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ に対して $L_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}} \cong L_{\mathcal{O}'_{\mathbb{C}}}$ が成立するならば $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} = \mathcal{O}'_{\mathbb{C}}$;

6. $G_{\mathbb{C}}$ が A_n 型の単純因子しか持たなければ

$$\{L_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}; \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \text{は } G_{\mathbb{C}}\text{-軌道}\} = \mathsf{Irr} W.$$

Remark 3.3. 定理 3.2 はいわゆる Springer 対応の変種であるが、通常の Springer 対応とは異なり全ての Weyl 群の表現が出現するという訳ではない。全ての表現を出す為には $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ の任意の点における $G_{\mathbb{C}}$ の等方群の連結成分群 (A-群と呼ばれる) の (全てではない) ある種の表現を考える必要があるが、ここでは詳しくは述べない。

4 exotic 版 Springer 表現

この節では $G = Sp(2n)$ とする。

V_1 を $Sp(2n)$ のベクトル表現、すなわち $\mathbb{A}^{2n}$ に $Sp(2n)$ の非自明かつ線形な作用を $GL(2n)$ への自然な埋め込みを介して与えたものとする。$V_2 := \wedge^2 V_1$ とする。このとき $\mathbb{V} := V_1 \oplus V_2$ とおき G の対角作用を考えると、これは形式的には $\mathfrak{g}$ と同じ次元を持つ G の表現となる。

このとき、

$$\mathfrak{N} := \{y \in \mathbb{V}; f(y) = 0, \forall f \in \mathbb{Z}[\mathbb{V}]^G_+\}$$

とする。この $\mathfrak{N}$ を $\mathbb{Z}$ 上のスキームと見なす[3]。

以下では、この $\mathfrak{N}$ を通常の冪零錐 $\mathcal{N}$ の類似物であると思って議論を展開すると何が起こるかを見る。

Theorem 4.1 ([K07a] §2, §6)**.** *1.* $\mathfrak{N}$ は $\mathbb{Z}$ 上平坦な正規スキーム;

2. $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}$ の $G_{\mathbb{C}}$-軌道とする。この時 $\mathfrak{N}$ の $\mathbb{Z}$ 上平坦な匿役局所閉部分スキーム $\mathbb{O}$ であって、その $\mathbb{C}$ への特殊化が $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ となりかつ各代数閉体 $\Bbbk$ に対して $\mathbb{O}_{\Bbbk}$ が単一の $G_{\Bbbk}$-軌道となるものが存在する (これを $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{Z}$ モデルと呼ぶ)。

各 $\beta \in X_*(T)$ に対して $\mathbb{V}[\beta]$ を $\mathbb{V}$ の T-ウェイト β 部分とする。この時

$$\mathbb{V}^+ := \bigoplus_{\alpha \in R^+} (\mathbb{V}[\alpha] \oplus \mathbb{V}[\alpha/2]) \subset \mathbb{V}$$

とすると、これは $\mathbb{V}$ の B-安定 affine 部分空間となる[4]。

[3]実は $\mathfrak{N}$ は $V_1 \cong \mathbb{A}^{2n}$ と $\mathfrak{N} \cap V_2$ の直積になる。

[4]これは $\mathfrak{n}$ の類似であり、特に $\mathfrak{n}$ と同じ次元を持つ affine 空間である。

Definition 4.2 (exotic 版軌道多様体)**.** $G_{\mathbb{C}}$-軌道 $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{Z}$ モデル $\mathbb{O}$ を (定理 4.1 のように) 取る。そして、$\mathbb{O}$ に付随した軌道多様体を $(\mathbb{O} \cap \mathbb{V}^+)$ の既約成分として定める[5]。

この時、$K^T(\mathbb{V}^+)$ を $\mathbb{V}^+$ の $\mathbb{Z}$ 上平坦な T-同変連接層の圏[6]の Grothendieck 群とする。その時、写像

$$\mathsf{c} : \mathsf{Orb}\mathbb{O} \ni \mathfrak{Y} \mapsto [\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}] \in K^T(\mathbb{V}^+)$$

は前節と全く同様の構成によって存在する。また $K^T(\mathbb{V}^+) \cong R(T)$ なので

$$p_{\mathfrak{Y}} := (\mathsf{fx} \circ \mathsf{c}(\mathfrak{Y})) \text{ の非零な最低次数の斉次部分} \in \mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]$$

も well-defined になる。この多項式の事も (を) 特性多項式もしくは (exotic 版)Joseph 多項式と呼ぶ。

Theorem 4.3 ([K06b], [K07a] Theorem 6.1)**.** $\mathbb{O}$ を $\mathfrak{N}$ の G-軌道の $\mathbb{Z}$ モデルとする

1. $\mathsf{Orb}\mathbb{O}$ の全ての元は $\mathbb{Z}$ 上平坦かつ同じ次元を持つ;
2. 全ての $\mathfrak{Y} \in \mathsf{Orb}\mathbb{O}$ に対して
$$\deg p_{\mathfrak{Y}} := \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{N} - \dim \mathbb{O}\right);$$
3. $\{p_{\mathfrak{Y}} : \mathfrak{Y} \in \mathsf{Orb}\mathbb{O}\}$ は一時独立な $\mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]$ の部分集合;
4. $M_{\mathbb{O}} := \sum_{\mathfrak{Y}\in} \mathbb{C}p_{\mathfrak{Y}}$ は既約 W-加群の構造を持つ;
5. $\mathbb{O}'$ を $\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}$ の $G_{\mathbb{C}}$-軌道の $\mathbb{Z}$ モデルとする。この時、$M_{\mathbb{O}'} \cong M_{\mathbb{O}}$ ならば $\mathbb{O} = \mathbb{O}'$ が成立する;
6. 上の構成が誘導する対応
$$G_{\mathbb{C}} \backslash \mathfrak{N}_{\mathbb{C}} \ni \mathbb{O}_{\mathbb{C}} \mapsto M_{\mathbb{O}} \in \mathsf{Irr}W$$
は全単射。

5 対応の構成

設定は前節と同様とし、特に $G = Sp(2n)$ とする。この時、$\mathbb{Z}$ 上平坦な T-指標は非自明には変形できないので、特殊化から誘導される可換図式

$$\begin{tikzcd} K^{T_{\Bbbk}}(\mathbb{V}^+_{\Bbbk}) \arrow[dr] & K^T(\mathbb{V}^+) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & K^{T_{\mathbb{C}}}(\mathbb{V}^+_{\mathbb{C}}) \arrow[dl] \\ & R(T) & \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

[5]元々の軌道多様体には冪零軌道を $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ とおいた時にその Kirillov-Kostant symplectic 構造に関する $B_{\mathbb{C}}$-安定 Lagrangian 部分多様体であった。しかし、我々の状況では $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}$-不変 symplectic 多様体の構造を持つかどうかは不明なので、この多様体がどのような意味を持っているのかという部分にはよく分からないところがある。

[6]これはアーベル圏ではない。

が定まる。但し、下辺は自然な同型 $R(T_{\Bbbk}) \cong R(T) \cong R(T_{\mathbb{C}})$ を用いて同一視を行っている。この事は各軌道多様体に対する特性多項式は $\mathbb{Z}$ 上で考えても $\mathbb{C}$ や $\Bbbk$ に特殊化してから考えても変わらないという事を主張している。

同様の事は $\mathcal{N}$ についても言える。但し、$\mathfrak{N}$ の場合とは次のような幾何学的構造の違いがある

Theorem 5.1 (Spaltenstein [Spa77]). $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ 軌道とすると、局所閉部分スキーム $\mathcal{O} \subset \mathcal{N}$ であってその $\mathbb{C}$ への特殊化が $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ となり、$\mathbb{Z}$ 上平坦かつ $\mathcal{O}_{\Bbbk}$ は $\mathsf{char}\Bbbk \neq 2$ の時に単一の $G_{\Bbbk}$-軌道となるものが存在する。(この $\mathcal{O}$ を $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ の $\mathbb{Z}$ モデルと呼ぶ。)

Theorem 5.2 (Hesselink-Spaltenstein [Hes79, Spa83]). 定理 *5.1* の設定の下で、$\mathsf{char}\Bbbk = 2$ とした時に $\mathcal{O}_{\Bbbk}$ は既約な $\Bbbk$-スキームで有限個の $G_{\Bbbk}$-軌道の和でかける。また、

$$\# G_{\Bbbk} \backslash \mathfrak{N}_{\Bbbk} = \# \mathsf{Irr} W$$

という恒等式が成立する[7]。

定理 5.1, 5.2 によって $\mathsf{Orb}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ の元 $\mathfrak{Y}_{\mathbb{C}}$ はある $\mathbb{Z}$-上平坦な B-安定スキーム $\mathfrak{X}$ であって各代数閉体 $\Bbbk$ に対して

$$\overline{\mathfrak{X}_{\Bbbk}} \subset \overline{(\mathcal{O}_{\Bbbk} \cap \mathfrak{n}_{\Bbbk})}$$

が既約成分となるものが存在する事が分かる[8]。

以下、$\mathsf{char}\Bbbk = 2$ を仮定する。この時、$\mathcal{O}_{(0,\Bbbk)}$ を $\mathbb{C}$ 上の軌道の $\mathbb{Z}$ モデルから生じる $G_{\Bbbk}$-安定局所閉部分スキーム $\mathcal{O}_{\Bbbk}$ の稠密開軌道とする。その時に $\mathsf{Orb}\mathcal{O}_{\Bbbk}$ を $(\mathcal{O}_{(0,\Bbbk)} \cap \mathfrak{n}_{\Bbbk})$ の既約成分として定める。

すると、可換図式 (5.1) の類似より以下が成立する。

Theorem 5.3. 上の設定で $\mathfrak{X}_{\Bbbk} \in \mathsf{Orb}\mathcal{O}_{\Bbbk}$ に対応する特性多項式 $p_{\mathfrak{X}_{\Bbbk}}$ は $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}} \in \mathsf{Orb}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ に対応する特性多項式 (*Joseph* 多項式)$p_{\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}}$ と一致する。

Remark 5.4. 定理 5.3 の設定では標数 2 における全ての軌道に付随する軌道多様体の特性多項式ではなく、標数 0 のものから $\mathbb{Z}$ モデルを通じて標数 2 への簡約で得られるものだけを対象にしている事になる。

上の考察から $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ の $G_{\mathbb{C}}$-軌道の軌道多様体に付随する Joseph 多項式と $\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}$ から生じる (exotic 版)Joseph 多項式を比較する為には軌道の $\mathbb{Z}$ モデルを用いた標数 2 への簡約を比較すれば良いという事が分かる。

さて、標数 2 の体上では対称テンソルと交代テンソルは同じものになる。この事は $V_2 \cong \wedge^2 V_1$ と $\mathfrak{g} \cong S^2 V_1$ を $\mathbb{Z}$ 上で考えたものを $\Bbbk$ に特殊化した時に次の $G_{\Bbbk}$-加群としての短完全系列が存在する事を主張する

$$0 \longrightarrow (V_2)_{\Bbbk} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\Bbbk} \longrightarrow (V_1)_{\Bbbk}^{[1]} \longrightarrow 0.$$

ここで、$(V_1)_{\Bbbk}^{[1]}$ は $(V_1)_{\Bbbk}$ を (幾何学的)Frobenius 射

$$\mathsf{Fr} : Sp(2n, \Bbbk) \ni \{a_{ij}\} \mapsto \{a_{ij}^2\} \in Sp(2n, \Bbbk)$$

[7] この恒等式は $\mathsf{char}\Bbbk \neq 2$ の時には $<$ になる。

[8] しかし、$\mathfrak{X}_{\Bbbk}$ は $\mathsf{char}\Bbbk = 2$ の時には複数の $G_{\Bbbk}$-軌道にまたがりうるので、naive な意味では軌道多様体ではない

によって引き戻して得られる表現 (この事を通常 Frobenius twist を呼ぶ)。この短完全系列の存在は

$$\pi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\Bbbk}$$

という affine 直線上の $G_{\Bbbk}$-安定多様体の平坦族で

$$\pi^{-1}(a) = \begin{cases} \mathfrak{g}_{\Bbbk} & (a \neq 0) \\ (V_1)^{[1]}_{\Bbbk} \oplus (V_2)_{\Bbbk} & (a = 0) \end{cases}$$

となるものが存在する事を意味する。

この時、$\mathcal{V}$ は $B_{\Bbbk}$-安定な部分族 $\pi_+ : \mathcal{V}^+ \to \mathbb{A}^1_{\Bbbk}$ であって

$$\pi_+^{-1}(a) = \begin{cases} \mathfrak{n}_{\Bbbk} & (a \neq 0) \\ (V_1^+)^{[1]}_{\Bbbk} \oplus (V_2^+)_{\Bbbk} & (a = 0) \end{cases}$$

を満たすものが自然に構成できる。ここで、$V_i^+ := V_i \cap \mathbb{V}^+ \ (i = 1, 2)$ である。

これを用いて写像族

$$\begin{tikzcd} G_{\Bbbk} \times^{B_{\Bbbk}} \mathcal{V}^+ \arrow[rr, "\widetilde{\nu}"] \arrow[dr] & & \mathcal{V} \arrow[dl] \\ & \mathbb{A}^1_{\Bbbk} & \end{tikzcd}$$

を構成する事ができる。このとき $\mathcal{W} := \mathrm{Im}\widetilde{\nu}$ と置き、写像 F_1 を

$$\mathsf{F}_1 := \mathsf{Fr} \oplus \mathrm{id} : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$$

のように定義すると、次が成立

Theorem 5.5 ([K07a] Theorem 4.1)**.** *1.* $\mathcal{W} \cap \pi^{-1}(a) \cong \begin{cases} \mathcal{N}_{\Bbbk} & (a \neq 0) \\ \mathsf{F}_1^{-1}\mathfrak{N}_{\Bbbk} & (a = 0) \end{cases}$;

2. 任意の $\mathfrak{N}_{\Bbbk}$ の $G_{\Bbbk}$-軌道 $\mathbb{O}_{\Bbbk}$ は $\mathbb{A}^1_{\Bbbk}$ 上平坦な (単一の)$G_{\Bbbk}$-軌道の族 $\mathbb{O}^{\sim}_{\Bbbk}$ に延長される。

3. 上で、$\mathbb{O}^{\sim}_{\Bbbk} \cap \pi^{-1}(a) \ (a \neq 0)$ は a の値に依らず一定の $G_{\Bbbk}$-軌道を定め、特に次の全単射を誘導する

$$G_{\Bbbk} \backslash \mathfrak{N}_{\Bbbk} = G_{\Bbbk} \backslash \mathsf{F}_1(\mathfrak{N}_{\Bbbk}) \leftrightarrow G_{\Bbbk} \backslash \mathcal{N}_{\Bbbk}.$$

4. 上で、$\mathbb{O}^{\sim}_{\Bbbk} \cap \mathcal{V}^+$ の既約成分 $\mathfrak{Z}$ の各ファイバーへの制限 $\mathfrak{Z} \cap \pi^{-1}(a) \ (a \in \mathbb{A}^1_{\Bbbk})$ は常に既約である。

証明のスケッチ. 次の写像

$$\mathsf{m} : \mathbb{V}_{\Bbbk} \ni y_1 \oplus y_2 \mapsto \mathsf{Sym}^2 y_1 + y_2 \in \mathfrak{g}_{\Bbbk}$$

が $\mathbb{A}^1_{\Bbbk}$ 上の $G_{\Bbbk}$-同変な有限写像の族

$$\widetilde{\mathsf{m}} : \mathbb{A}^1 \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

へとのびる事を用いて $\mathbb{V}_{\Bbbk}$ の軌道構造を $\mathcal{V}$ の軌道の族と対応づける事によって得られる。 □

$K^{T_{\Bbbk}}(\mathcal{V}^+)$ を $\mathbb{A}^1$ 上平坦な $\mathcal{V}^+$ の $T_{\Bbbk}$-同変連接層のなす圏の Grothendieck 群とする。すると、$0, 1 \in \mathbb{A}^1_{\Bbbk}$ に対する特殊化写像は次の可換図式を定める

$$\begin{tikzcd} K^{T_{\Bbbk}}(\mathcal{V}^+ \cap \pi^{-1}(0)) \arrow[dr] & K^{T_{\Bbbk}}(\mathcal{V}^+) \arrow[l] \arrow[r] & K^{T_{\Bbbk}}(\mathcal{V}^+ \cap \pi^{-1}(1)) \arrow[dl] \\ & R(T_{\Bbbk}) & \end{tikzcd} .$$

さて、次の写像

$$\mathsf{F} := \mathsf{F}_1^* : K^{T_{\Bbbk}}(\mathbb{V}^+_{\Bbbk}) \longrightarrow K^{T_{\Bbbk}}(\mathcal{V}^+ \cap \pi^{-1}(0))$$

を考える。この写像と各々と $R(T)$ との自然な同一視は可換でない。

Lemma 5.6. $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}^+ \cap \pi^{-1}(0)$ を $T_{\Bbbk}$-安定な部分多様体とする。自然な同型に次のように名前をつける。

$$\psi_0 : K^{T_{\Bbbk}}(\mathbb{V}^+) \cong R(T_{\Bbbk}), \psi_1 : K^{T_{\Bbbk}}(\mathcal{V}^+ \cap \pi^{-1}(0)) \cong R(T_{\Bbbk})$$

また、$R(T)$ の元 f に対して f×f の最低時の項を $p(f)$ とおく事にする。このとき $\mathcal{X}$ によって定まる定数 $c \in \mathbb{Q}$ が存在して

$$cp(\psi_1(\mathcal{X})) = p(\psi_0(\mathsf{F}(\mathcal{X})))$$

が成立する。

Proof. $\mathcal{X}_1$ を $\mathcal{X}$ の開部分多様体であって $\mathcal{V}^+ \cap \pi^{-1}(0)$ へと smooth 埋め込みを持つ様なものとする。$T_{\Bbbk}$-同変性より $\mathcal{X}_1$ は $T_{\Bbbk}$-作用で安定としてよい。さらに、$\mathcal{X}_1$ を小さく取り直し、$\mathcal{X}_2 \subset \mathcal{X}_1$ を開部分集合で、$\mathsf{F}_1^{-1}(\mathcal{X}_2)$ も $\mathbb{V}^+$ へと smooth 埋め込みを持ち、写像

$$\eta : \mathsf{F}_1^{-1}(\mathcal{X}_2) \to \mathcal{X}_2$$

が有限平坦になるようなものが取れる。この時、もう一度 $\mathcal{X}_3 \subset \mathcal{X}_2$ を $T_{\Bbbk}$-安定開部分多様体に取り直して写像

$$\Bbbk[\mathcal{X}_3] \longrightarrow \Bbbk[\mathsf{F}_1^{-1}(\mathcal{X}_3)]$$

は自由加群になるように取り直せる。一度このように取れれば、ある

$$C = \sum_{\beta} c_{\beta} e^{\beta} \in R(T), \forall c_{\beta} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

が存在して

$$A \left[\Bbbk[\mathfrak{n}_{\Bbbk}]\right] \psi_1(\mathcal{X}_3) = \left[\Bbbk[\mathbb{V}^+_{\Bbbk}]\right] \psi_0(\mathsf{F}(\mathcal{X}))$$

が存在する事が分かる[9]。さて、これらの補正項は F_1 が $\mathbb{V}^+$ に制限した時には 2^n 次の写像であった事を思い出すと p で送った後には左辺は A から生じる c $(0 \leq c \leq 2^n)$、右辺には 1 がかかる事が分かる。従って特性多項式は開集合を取るという操作で不変な事から

$$c\psi_1(\mathcal{X}) = c\psi_1(\mathcal{X}_3) = \psi_0(\mathsf{F}_1^{-1}(\mathcal{X}_3)) = \psi_0(\mathsf{F}_1^{-1}(\mathcal{X}))$$

を得る。 □

[9] この補正の項は ψ_1, ψ_0 が各々$\Bbbk[\mathfrak{n}], \Bbbk[\mathbb{V}^+_{\Bbbk}]$ と同じ $T_{\Bbbk}$-指標を持つ層である $\mathcal{O}_{\mathcal{V}^+ \cap \pi^{-1}(0)}$ および $\mathcal{O}_{\mathbb{V}^+_{\Bbbk}}$ を $1 \in R(T)$ と同一視した事から生じる

Theorem 5.7 ([K07a] Theorem 8.7 他)**.** *$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ の $G_{\mathbb{C}}$-軌道とする。そのとき、ある $\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}$ の $G_{\mathbb{C}}$-軌道 $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ が存在して次が成立*

1. *$\dim \mathcal{O}_{\mathbb{C}} = \dim \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$;*
2. *$L_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}} = M_{\mathbb{O}_{\mathbb{C}}} \subset \mathbb{C}[\mathfrak{t}_0]$;*
3. *$\mathfrak{X} \in \mathsf{Orb}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ とすると、$\mathfrak{Y} \in \mathsf{Orb}\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ であって $p_{\mathfrak{X}} \in \mathbb{Q}p_{\mathfrak{Y}}$ が成立する。*

証明のスケッチ*.* 3) について述べる。可換図式 (5.1) やその $\mathcal{N}$ 類似を用い、標数 2 の時に類似の事実を証明する事に帰着する。この時、各軌道多様体の $\mathbb{Z}$ モデルが任意の標数の体への簡約の下で既約である事が必要になるが、それは [Spa77] の議論をよく見るとできる。次に標数 2 の時に $\mathcal{W}$ を用いて軌道多様体の標数 2 への簡約を変形し、それによって特性多項式が保たれる事を見る。するとあとは補題 5.6 を適用すれば結果を得る。2) は 3) から自動的に従い、1) は 3) の議論と定理 5.2 より従う。 □

Example 5.8 (n = 2)*.* 上の構成が何を言っているのかを $G = Sp(4)$ の場合に見る。$\beta \in X^*(T)$ に対して $\mathbf{x}_\beta \in \mathfrak{g}$、$\mathbf{y}_\beta \in \mathbb{V}$ を各々ウェイト β の固有ベクトルとする[10]。$\mathsf{Irr}W$ は自明表現 triv, 符号表現 sgn, $\mathfrak{t}_0$ への表現 reg, s_1 に関して符号表現で s_2 に関しては自明表現の Ssgn, Lsgn := sgn$\otimes$Ssgn の 5 つからなる。この状況下で通常の ($\mathcal{N}$ に関する)Springer 表現を通常、その exotic 版を exotic と表すと我々の対応は以下の表のようになる。

$\mathsf{Irr}W$	次元	通常 (char$\Bbbk \neq 2$)	通常 (char$\Bbbk = 2$)	exotic
sign	1	0	0	0
Ssgn	1	$\mathbf{x}_{2\epsilon_1}$	$\mathbf{x}_{2\epsilon_1}$	$\mathbf{y}_{\epsilon_1}$
Lsgn	1	$\mathbf{x}_{\alpha_1}$	$\mathbf{x}_{\alpha_1}$	$\mathbf{y}_{\alpha_1}$
reg	2	$\mathbf{x}_{\alpha_1}$	$\mathbf{x}_{\alpha_1} + \mathbf{x}_{2\epsilon_1}$	$\mathbf{y}_{\alpha_1} + \mathbf{y}_{\epsilon_1}$
triv	1	$\mathbf{x}_{\alpha_1} + \mathbf{x}_{2\epsilon_2}$	$\mathbf{x}_{\alpha_1} + \mathbf{x}_{2\epsilon_2}$	$\mathbf{y}_{\alpha_1} + \mathbf{y}_{\epsilon_2}$

Table 1: 軌道の対応

$\mathsf{Irr}W$	次元	通常 (char$\Bbbk \neq 2$)	通常 (char$\Bbbk = 2$)	exotic
sign	1	$4\epsilon_1\epsilon_2(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)$	$4\epsilon_1\epsilon_2(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)$	$\epsilon_1\epsilon_2(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)$
Ssgn	1	$2(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)$	$2(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)$	$(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)$
Lsgn	1	N/A	$4\epsilon_1\epsilon_2$	$\epsilon_1\epsilon_2$
reg	2	$\alpha_1, 2\epsilon_2$	$\alpha_1, 2\epsilon_2$	α_1, ϵ_2
triv	1	1	1	1

Table 2: 特性多項式

[10] $\beta \neq 0$ ならこれは定数倍を除いて unique に来まる

6 Macdonald 表現との対応

前節の議論で我々の exotic 版 Springer 表現 $M_{\mathbb{O}}$ は元々の Springer 表現 $L_{\mathcal{O}}$ とほとんど同じ情報を持っているという事を見た。ここでは Macdonald 表現と我々の exotic 版 Springer 表現の間の対応を見る。

Theorem 6.1 ([K07a] Theorem 9.13)**.** $\mathfrak{N}_{\mathbb{C}}$ の任意の $G_{\mathbb{C}}$-軌道 $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ に対して、ある軌道多様体 $\mathfrak{Y} \in \mathsf{Orb}\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ と、ある部分ルート系 $R_{\mathfrak{Y}} \subset R$ が存在して $p_{\mathfrak{Y}} \in \mathbb{Q}\sigma(R_{\mathfrak{Y}})$ となるものが存在する。

この定理の証明は具体的に $w \in W$ であって

$$\overline{\mathfrak{Y}} = \overline{B_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}_{\mathbb{C}}^{+} \cap w\mathbb{V}_{\mathbb{C}}^{+})}$$

かつその特性多項式が $\sigma(R_{\mathfrak{Y}})$ となるものを具体的に構成する。しかし、構成は割と ad hoc で解説の意味があるかどうか不安なので省略する。興味ある方は [K07a] §9 を参照されたい。

定理 6.1 と定理 5.7 3) を組み合わせると、次の結論を得る

Corollary 6.2. $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ の任意の $G_{\mathbb{C}}$-軌道 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ に対して、ある $\mathfrak{X} \in \mathsf{Orb}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ と部分ルート系 $R_0 \subset R$ であって $p_{\mathfrak{X}} \in \mathbb{Q}\sigma(R_0)$ となるものが存在する。つまり、C_n 型の場合定理 *3.2* によって記述される任意の基底付き W-表現の中にある $\sigma(R_0)$ の有理数倍の形に表される基底ベクトルが存在する。

Remark 6.3.

1. 我々の exotic 版 Springer 対応は 1 対 1 であったので定理 6.1 は C 型の場合に Macdonald 表現が $\mathsf{Irr}W$ を尽くす事の (非常に難しい) 別証明を与えることになる。
2. 一般に部分ルート系 $R' \subset R$ に対する Macdonald 生成元を W-作用で動かしたものたちは互いに一時独立にはならない。また、一般の特性多項式 $p_{\mathfrak{Y}}$ は Macdonald 生成元の W-作用による基底変換の格好には書けない。従って我々の結果は当然そうなると予想されていた結果であったのかどうか筆者には分からない。(筆者の調べた限りではこの類の Joseph 多項式の計算は標数 0 の Richardson 軌道や低ランクの場合にしか知られていないようである。)

我々の結論を $G = SO(2n+1)$ へと適用する事は (対応の書き下し方の技術的問題を除いては) 易しい。しかし、筆者には少なくとも現時点では次については解決の目処を持たない

Question 6.4. 定理 6.1 の状況下で果たして $p_{\mathfrak{Y}} = \sigma(R_{\mathfrak{Y}})$、つまり比例定数の部分は 1 なのであろうか？

7 最後に

定理 2.2 で見たように全てのルート系を考えようとすると、Macdonald 表現ではない Weyl 群の表現がある。この事と A-群と呼ばれる群が一般に非可換であるという事実によって我々の構成の類似物は E 型 (例外型) については存在しえないのではないかと考えられている。そういう訳で我々の今回の結果がどういう背景を持っているのかは筆者には正直なところ分からない。

ただし、問題 6.4 が正しいと仮定すれば我々の構成は元々の Springer の構成でコホモロジー群の係数を正標数の体などに取る事で modular 表現を (非自明に) 生む事もできるので Weyl 群の表現論とは現在 A 型について分かっている事の類似を超えたレベルでも関係しているのではないかという期待 (だけ) はある。

References

[CG97] Neil Chriss, and Victor Ginzburg, Representation theory and complex geometry. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997. x+495 pp. ISBN 0-8176-3792-3

[Hes79] Wim H. Hesselink, Nilpotency in Classical Groups over a Field of Characteristic 2, Math. Zeit. 166, 165–181, (1979)

[Jos89] Anthony Joseph, On the characteristic polynomials of orbital varieties, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 22 no.4 569–603, (1989).

[K06b] Syu Kato, An exotic Springer correspondence for symplectic groups, math.RT/0607478v2,

[K07a] Syu Kato, Deformations of nilpotent cones and Springer correspondences, preprint.

[LS79] George Lusztig, and Nicolas Spaltenstein, Induced unipotent classes, J. London Math. Soc., **19**, (1979), 41–52.

[Spa77] Nicolas Spaltenstein, On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups, Topology. 16, 203–204 (1977).

[Spa83] Nicolas Spaltenstein, Nilpotent Classes and Sheets of Lie algebras in Bad characteristic, Math. Zeit. 181 31–48, (1983).

[Spr76] Tonny A. Springer, Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representation theory of Weyl groups, Invent. Math. 36 (1976) 173–207.