# 一般相対性理論 ('11) 例題と略解

例題 1.　電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ のローレンツ変換を求めなさい。
（解）

電磁場は２階の反対称テンソルである場の強さ $F^{\mu\nu}$ として統一的に表される。そのローレンツ変換はテンソルの変換性に従って以下の通り：

$$F^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu'}{}_{\beta}F^{\alpha\beta}.$$

ここで行列で表示すると

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Lambda^{\mu'}{}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので（ただし、ローレンツ変換は $x$ 方向への速さ $v(=\beta)$ のローレンツ変換を想定した)、行列の掛け算を行って $F^{\mu'\nu'}$ を求め、その各成分から $\vec{E}'$, $\vec{B}'$ の各成分を求めると

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, \quad B'_x = B_x, \\ E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z), \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z), \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y). \end{aligned}$$

これを任意の方向のローレンツ変換の場合に一般化すると

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, \quad B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp}), \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{E}_{\perp}). \end{aligned}$$

と書ける。ここで $_{\parallel}$, $_{\perp}$ は、速度 $\vec{v}$ に平行な成分、垂直な方向のベクトルをそれぞれ表す。

例題 2.
(1) 電荷 $q$ に働く、電磁場からのローレンツ力を４元力として

$$F^{\mu} = qF^{\mu}{}_{\nu}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}$$

として表す。この時、４元力の空間成分、時間成分は、それぞれ具体的には以下の様に表されることを示しなさい。

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ F^0 &= q\gamma\vec{v} \cdot \vec{E}. \end{aligned}$$

(解)

$F^1$ を具体的に計算すると

$$F^1 = q(F^1{}_0 \frac{dt}{d\tau} + F^1{}_2 \frac{dy}{d\tau} + F^1{}_3 \frac{dz}{d\tau})$$
$$= q\gamma(E_x + B_z \frac{dy}{dt} - B_y \frac{dz}{dt}) = q\gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_x.$$

他の空間成分も同様なので $\vec{F} = q\gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ が言える。また $F^0$ を計算すると

$$F^0 = q(F^0{}_1 \frac{dx}{d\tau} + F^0{}_2 \frac{dy}{d\tau} + F^0{}_3 \frac{dz}{d\tau}) = q\gamma \vec{E} \cdot \vec{v}. \tag{1}$$

(2) (1) で得た結果から、電場は無く、一様な磁場 $\vec{B}$ のみ存在する空間で、磁場と直交する方向に運動する電荷 $q$ の運動方程式を求めなさい。

(解)

(1) で導出した $F^0 = q\gamma \vec{v} \cdot \vec{E}$ を用いると、電場は無いので、運動方程式の時間成分は

$$\frac{dP^0}{d\tau} = \frac{d(\gamma m)}{d\tau} = F^0 = 0 \quad \rightarrow \quad v\ (\gamma): \text{一定}.$$

空間成分については

$$\frac{dP^i}{d\tau} = \frac{d(\gamma m v^i)}{d\tau} = F^i = q\gamma(\vec{v} \times \vec{B})_i \quad \rightarrow \quad \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

が言える。即ち、相対論的な効果は、電荷の質量が $\gamma$ 因子倍だけ大きくなるという形で現れることが分かる。

例題 3.　2 次元球面（地球儀の表面。半径を a とする）について、計量テンソル

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

を用いて、クリストッフェル記号 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ を求めなさい。

（解）

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma}, \quad \Gamma_{\mu\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu})$$

を用いて計算する。$\Gamma_{\mu\beta\gamma}$ の内でゼロにならない成分をあげると次のようである：

$$\Gamma_{\theta\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}\partial_\theta g_{\varphi\varphi} = -a^2 \sin\theta\cos\theta$$
$$\Gamma_{\varphi\theta\varphi} = \Gamma_{\varphi\varphi\theta} = \frac{1}{2}\partial_\theta g_{\varphi\varphi} = a^2\sin\theta\cos\theta.$$

よって、$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ で残る成分は、

$$\Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = g^{\theta\theta}\Gamma_{\theta\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2}(-a^2)\sin\theta\cos\theta = -\sin\theta\cos\theta$$
$$\Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = g^{\varphi\varphi}\Gamma_{\varphi\theta\varphi} = \frac{1}{a^2\sin^2\theta}a^2\sin\theta\cos\theta = \cot\theta.$$

尚、赤道上では $\cos\theta = 0$ のために、$\Gamma$ はすべてゼロとなる。これは赤道上では、考えている座標系が局所ローレンツ系となっていることを意味している。しかし、赤道上だけなので、$\Gamma$ の微分、即ち曲率はゼロでないことに注意しよう。

例題 4.　共変微分がテンソルとして変換すること、

$$u^{\mu'}{}_{;\beta'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} u^{\mu}{}_{;\beta},$$

即ち

$$\leftrightarrow u^{\mu'}{}_{,\beta'} + \Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'} u^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} (u^{\mu}{}_{,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} u^{\alpha})$$

を要請することで接続係数の一般座標変換性が得られることを示しなさい。

（解）上の２番目の式において

$$u^{\mu'}{}_{,\beta'} = \partial_{\beta'}(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} u^{\mu}) = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \partial_{\beta}(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} u^{\mu}) = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} u^{\mu}{}_{,\beta} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\mu}} u^{\mu}$$

これから

$$\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'} u^{\alpha'} = -\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\mu}} u^{\mu} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} u^{\alpha}$$

が得られる。ここで

$$u^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} u^{\alpha'},\ u^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} u^{\alpha'}$$

を代入し、$u^{\alpha'}$ の係数を両辺で等しいとすると

$$\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'} = -\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$$

右辺一項目は

$$-\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha'}} = -\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} (\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}}) + \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}}$$

と書き直せる。ここで、

$$\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}} = \delta_{\beta'}{}^{\mu'}$$

を用いた。こうして

$$\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta}}$$

が得られるが、これは講義で述べた変換性と一致している。

例題 5.　ビアンキの恒等式 $R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta;\gamma} + R^{\mu}{}_{\lambda\beta\gamma;\alpha} + R^{\mu}{}_{\lambda\gamma\alpha;\beta} = 0$ を証明しなさい。

（解）ヤコビ恒等式

$$[\nabla_{\gamma}, [\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}]] + [\nabla_{\alpha}, [\nabla_{\beta}, \nabla_{\gamma}]] + [\nabla_{\beta}, [\nabla_{\gamma}, \nabla_{\alpha}]] = 0$$

が自明に成り立つ。ここで

$$[\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}] A^{\mu} = R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta} A^{\lambda}$$

を用いると、

$$[\nabla_{\gamma}, [\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}]] A^{\mu} = (\nabla_{\gamma} R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}) A^{\lambda}$$

となる。こうしてビアンキの恒等式

$$R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta;\gamma} + R^{\mu}{}_{\lambda\beta\gamma;\alpha} + R^{\mu}{}_{\lambda\gamma\alpha;\beta} = 0$$

が示された。

例題 6. 例題 3 で求めた 2 次元球面（半径を a とする）についての計量テンソルを用いて、この球面についてのリーマンの曲率テンソル、リッチテンソル、およびスカラー曲率を求めなさい。
（解）例題 3 で求めたように、クリストッフェル記号で残る（ゼロでない）成分は以下のとおり：

$$\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$$
$$\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta} = \cot\theta.$$

・リーマンの曲率テンソル
2 次元の世界では、リーマンの曲率テンソルの独立な成分は一つのみ（前の 2 個、後ろの 2 個のそれぞれの添字は反対称性より ${}_2C_2 = 1$、即ち $(\theta, \varphi)$ の組む合わせのみとるので）。そこで $R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi}$ のみ計算する：

$$\begin{aligned} R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} &= \partial_\theta \Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi \Gamma^{\theta}{}_{\varphi\theta} + \Gamma^{\theta}{}_{\lambda\theta}\Gamma^{\lambda}{}_{\varphi\varphi} - \Gamma^{\theta}{}_{\lambda\varphi}\Gamma^{\lambda}{}_{\varphi\theta} \\ &= -\cos 2\theta + \sin\theta\cos\theta\cot\theta = \sin^2\theta. \end{aligned}$$

他の成分も反対称性を考慮すると $R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi}$ を用いて容易に求められる。例えば $R^{\theta}{}_{\varphi\varphi\theta} = -R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} = -\sin^2\theta$。
・リッチテンソル

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= R^{\mu}{}_{\theta\mu\theta} = R^{\varphi}{}_{\theta\varphi\theta} \\ &= g^{\varphi\varphi} g_{\theta\theta} R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} = \frac{1}{a^2\sin^2\theta} a^2 \sin^2\theta = 1. \end{aligned}$$

他の成分についても同様に計算出来て

$$\begin{aligned} R_{\varphi\varphi} &= R^{\theta}{}_{\varphi\theta\varphi} = \sin^2\theta, \\ R_{\theta\varphi} &= R_{\varphi\theta} = R^{\mu}{}_{\theta\mu\varphi} = 0. \end{aligned}$$

・スカラー曲率

$$\begin{aligned} R &= R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi} \\ &= \frac{1}{a^2} \times 1 + \frac{1}{a^2\sin^2\theta} \times \sin^2\theta = \frac{2}{a^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

スカラー曲率は座標のとり方に依らず、また球面のいたる所で曲がり方は等しいはずなので当然と言えるが、確かにスカラー曲率は場所に依らない。また $1/a^2$ に比例するのは、半径が大きいと曲がり方が小さいことを意味していて（$a \to \infty$ では平坦になる）、これも直感的に理解できる結果である。