

(速度の合成)

古典の力学では、例えば $v_1 = 70$ (km/時) で走る自動車に $v_2 = 20$ (km/時) で逆向きに走る自動車 (慣性系) から見た時の相対速度 v は、

$$v = v_1 + v_2 = 90 \text{ (km/時)}$$

となり、単純な速さの足し算なので、いくらでも速い相対速度を実現可能。

しかしながら、相対性理論では相対速度は単純な速さの足し算ではなく、**速さは決して光速を超えない**、という驚くべき結論になる。即ち、相対性理論では、相対速度の式は次のように変更される(説明省略)：

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

(注)

- v_1, v_2 が光速より十分に小さい時には、近似的に $v = v_1 + v_2$ となり、古典物理の結果と一致する。
- 上式は両辺を光速度 c で割ると以下の関係と良く似ている

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

(正確には三角関数でなく、“双曲線関数” $\tanh \theta$ の関係と同じ。)

この関係式より、もしも元の速度 v_1, v_2 が光速 c より小さければ、相対速度 v も必ず光速 c より小さい、という事を示す事ができる（不等式の証明 → 各自トライしてみる）。

例えば、 $v_1 = 0.7c, v_2 = 0.8c$ (c は光速) の場合、単純に足すと $1.5c$ となり光速を超えるが、上の正しい式を使うと、 $v = 0.96c$ となって光速を超えない事がわかる。

(質量とエネルギー)

古典の力学では、静止している物体はエネルギーを持たない、つまり $E = 0$ であると考えている。しかし、**相対性理論では静止していても**

$$E = m c^2$$

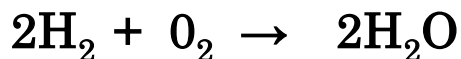
というエネルギーを持つと考えられている（説明省略）：

「質量とエネルギーの等価性」

例えば、 $m = 0.25$ (g) (“天使と悪魔”で盗難にあった“反物質”の量) の場合、そのエネルギー E は、100ワットの電球が1時間に放出するエネルギーの約7500万倍、という膨大なものである。

では、何故こんな膨大なエネルギーを無視していて、古典物理学では問題が生じなかったのだろうか？

その答えは、20世紀初めまでに発見されていた化学反応では、「質量不変の法則」があり、



といった分子の変化（原子核は変化しない）が起こっても、質量の総量は変化しない為。よって、この質量によるエネルギーは変化せず、最初からこのエネルギーが存在しないと考える場合と何ら変わらないのである。

丁度、非常に高い山の上（位置エネルギーは大きい）をスキーヤーが滑る場合でも、高度が変わらなければ、低い平地を滑る場合と同じで運動エネルギーは得られない、というのと同様。

→ 質量が減少するような反応があれば、エネルギーを取り出せるはず（高い所から落下する水により水力発電が可能である様に）。

実際、原子核の反応（核分裂、核融合）では、こうした質量の減少が起こっている → 原子爆弾や原子力発電の原理。

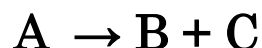
（注）“天使と悪魔”の場合の様に、素粒子の世界では質量が減るだけでなく、完全に消滅する事が可能 → 非常に莫大なエネルギー

例えば0.25グラムの反物質が等量の物質と出会って消滅すると、原爆と同等のエネルギーを放出！

(素粒子の生成・消滅)

既に“天使と悪魔”の例で述べたが素粒子の世界では、質量が減るだけでなく素粒子が完全に消えたり（消滅）、逆に作られたり（生成）する反応が可能 (!)

例として、ある素粒子A が別の素粒子 B とC に崩壊(decay)する (Aが消滅し、BとCが生成される) 反応



(例: $\pi^- \rightarrow \mu + \bar{\nu}_\mu$ 宇宙線が大気にぶつかり起きる。パイは素粒子ではないが)

を考える。A, B, C の質量をそれぞれ m_A, m_B, m_C と書く。すると、もしも

$$m_A > m_B + m_C$$

であれば (反応で質量の総和が減少)、質量のエネルギーがこの反応で減少するので、その分だけ運動エネルギーが放出される。逆に言えば、この条件が成り立つ時にのみ崩壊が起こり得る事がわかる。

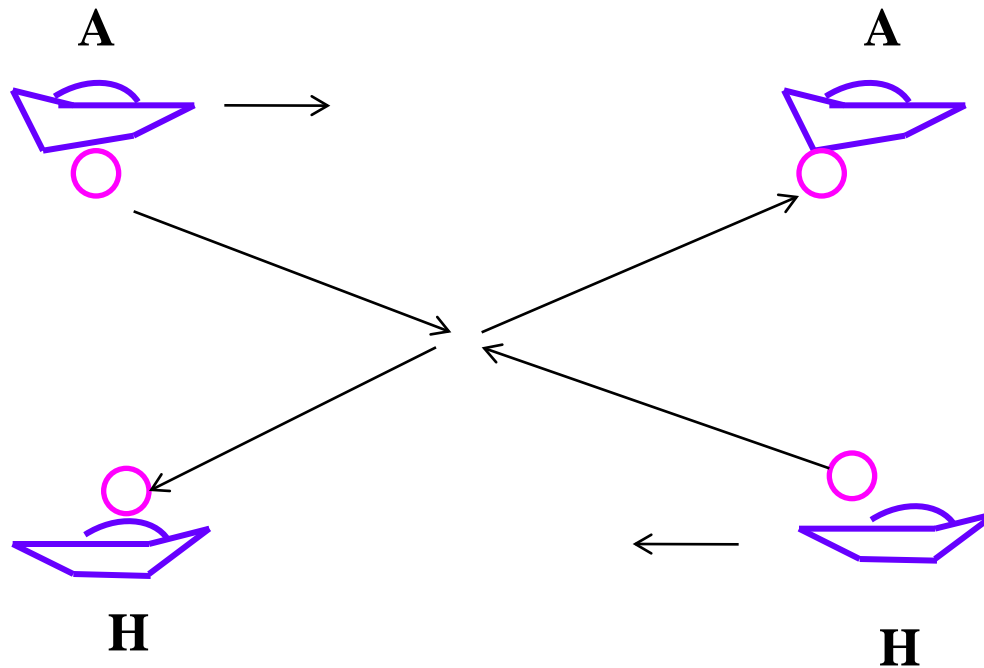
→ 軽い素粒子は重い素粒子には崩壊出来ない!

(スロープの途中で静止したスキーヤーは下ることは出来るが登れない)

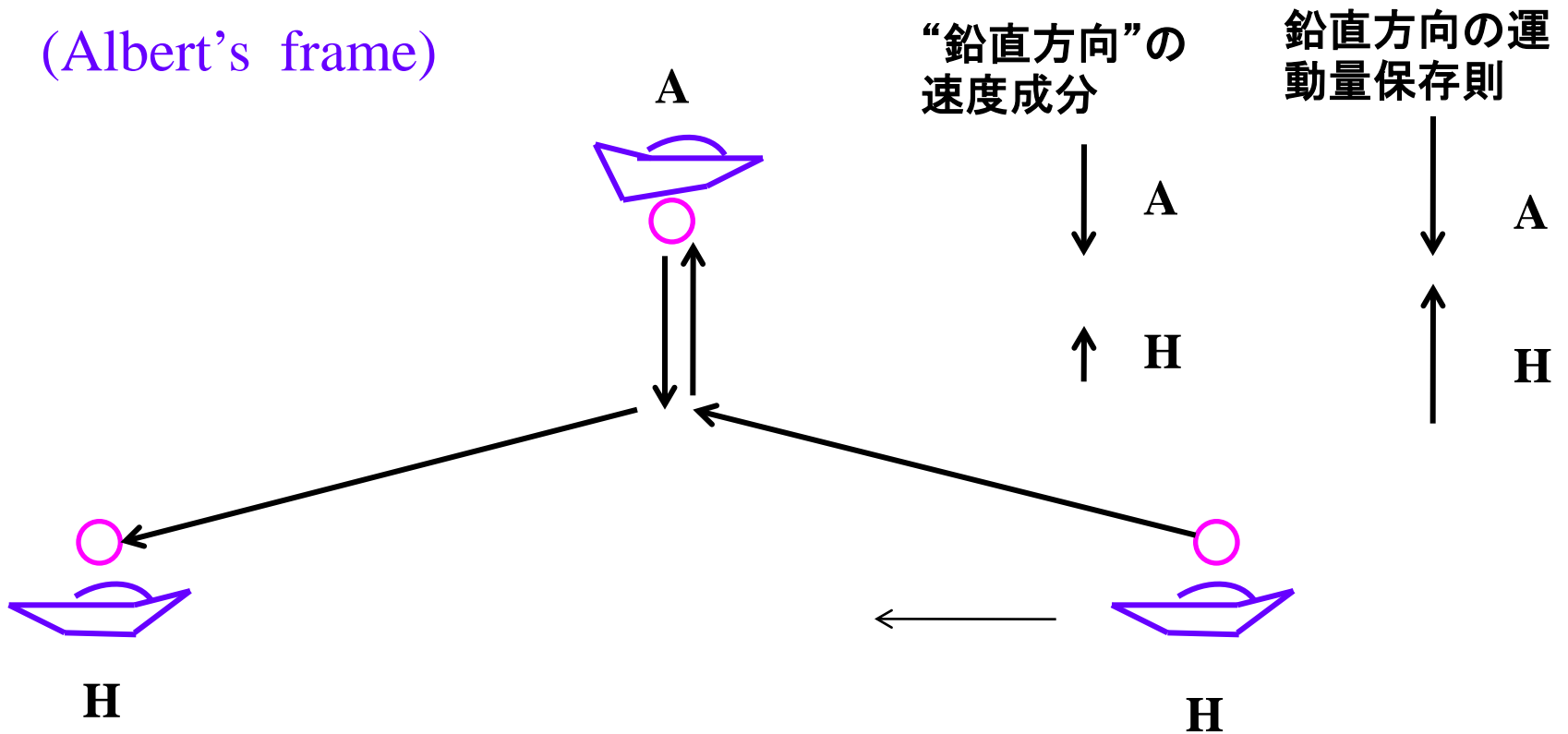
(動く物体の質量の増加)

ビデオで説明されていたように、動いている物体の質量は大きくなる（重くなる）と考えられる。

“宇宙玉突きゲーム” (spectator's frame)



(Albert's frame)



Albert から見ると、Henry のボールの往復時間の方が、自分のボールの往復時間よりずっと長い(動く時計の遅れと同じ)

- 自分に対し運動しているHenry のボールはあまり曲がらない
- Henry のボールの方がずっと重いと結論せざるを得ない !

速さ v で動いている物体の質量は

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m$$

のようにガンマ因子の分だけ大きくなる。（ v が c に近づくと非常に大きな質量になる。）

これに c^2 をかけると、運動している物体の持つエネルギーは

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

となる。 $v = c$ とすると、エネルギー E は無限大となる

→ 物体を光速まで加速できない

（例外： 質量ゼロの粒子（光子、ニュートリノ？））

→ 物体の速さは光速を越える事は出来ない。

4. 一般相対性理論の考え方と時間・空間の構造

特殊相対性理論の問題点：

- a. 慣性系（一定の速度で運動する観測者）についてのみ適用可能
- b. 万有引力の法則と相入れない

実際、太陽と惑星（水、金、地、火、、、）の間の万有引力は、遠く離れた2点間に瞬時に働く力（遠隔作用）であると思われていたが、「瞬時」という事であれば力は光速を越えて伝わる事になってしまう

→ 相対性理論の考えと矛盾

アインシュタインはこうした問題を解決するために、特殊相対性理論を一般化し、

「一般相対性理論」

を作り上げた。

この理論（一般相対論と略称）では、

- ・物理法則は（加速度系を含めた）全ての一般の観測者に対して同じように成立する。

- ・古典的な万有引力の法則を修正し、

「物体に働く重力は、それを観測する観測者が加速度系であることによって生じる

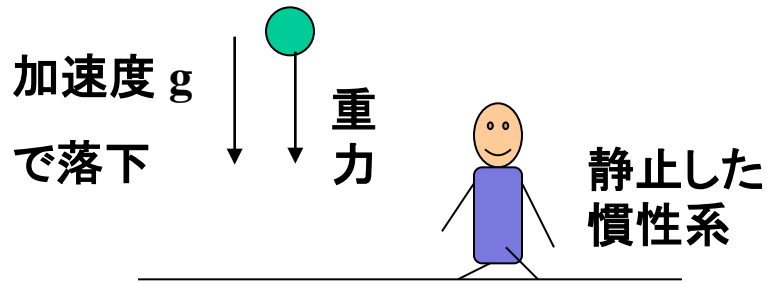
“見せかけの力”（慣性力）と等価である」

と考える。これを

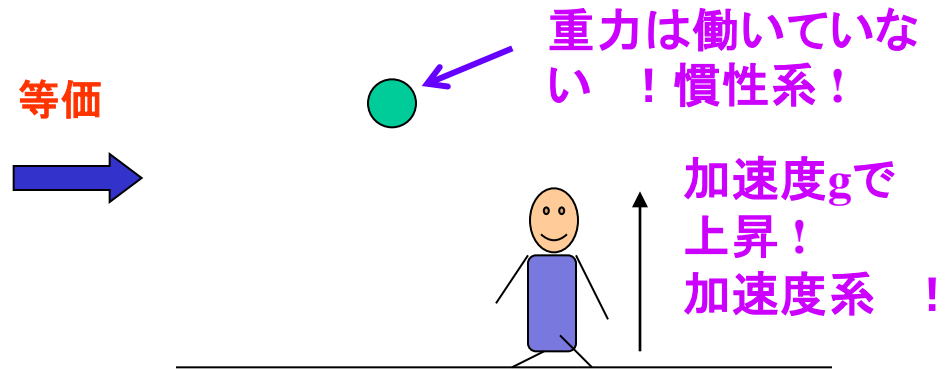
「**等価原理**（equivalence principle）」

という（図）。

(万有引力による見方)



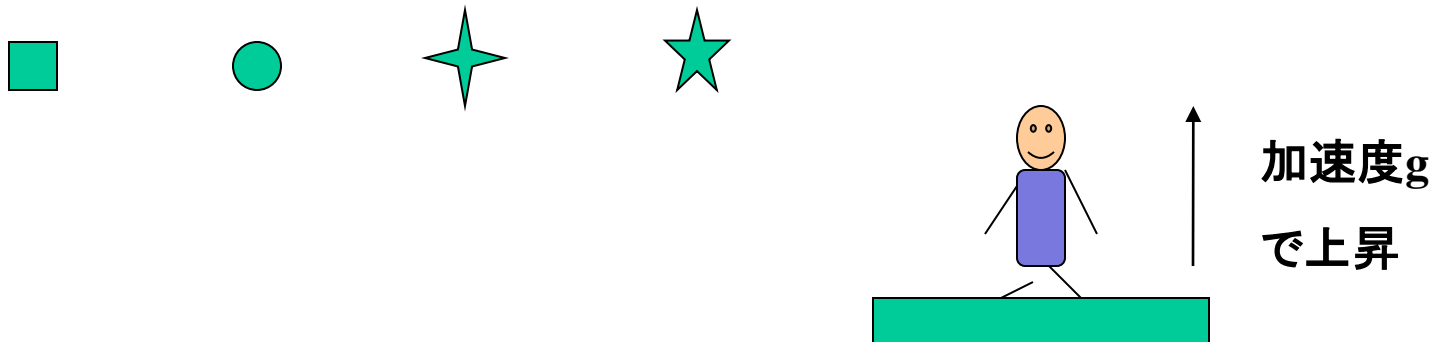
(一般相対論の見方)



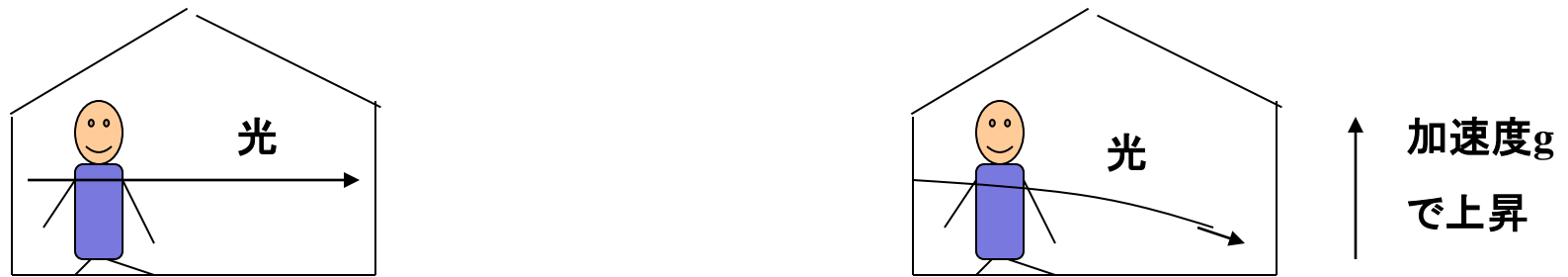
等価原理とピサの斜塔

等価原理によれば、ピサの斜塔から落下する物体がすべて同じように（同じ加速度で）落下するのは当然。

← 上向きに加速度 g で上昇する観測者（加速度系）から見ると
当然全ての物体は下向きに加速度 g で落下する、という事（下図）：



こう考えると、地上の観測者(加速度 g で上向きに加速している加速度系)から見ると、光さえも“地球に向かってわずかに落下”するはずである。即ち、あたかも重力で地球に引っ張られる様に見える。これは、例えば、宇宙空間に浮かぶ宇宙船中で直進していた光が、宇宙船が上向きに加速を始めると下向きに曲がるのと同じ現象、と考えられる(下図):



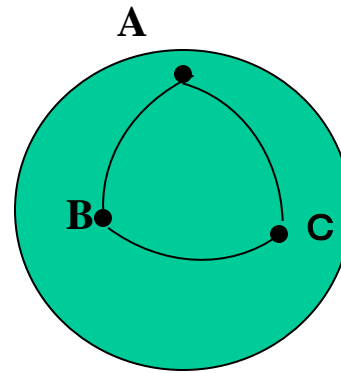
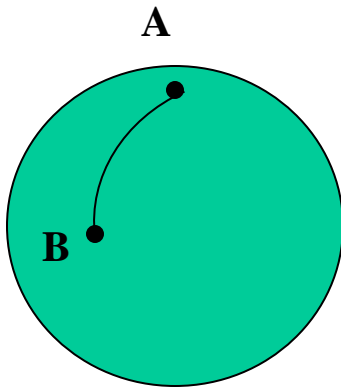
しかし、光のような質量の無いもの(量子力学(後出)では光は光子という質量ゼロの粒子として振舞う)が何故重力の影響を受けるのか「万有引力」では理解できない。不思議。

アインシュタインは、これは地球のような質量を持った物体の周りでは空間(時空)が歪む、即ち平坦な空間でなく曲がった空間になる為と考えた。

そこで、以下少し曲がった空間について考えてみよう。

例) 曲がった平面 (2次元の球面、“地球儀上の空間”、風船の表面)

例えば、地球儀の上で生まれて以来ずっと暮らすアリがいたとすると、アリにとっては、地球儀上の2点を結ぶ直線は、これを結ぶ最短の線、いわゆる大円に沿った曲線であり、2点間の距離は、この曲線の長さである、と考えるであろう (下図左) :



(注) 大円とは、2点と地球の中心を含む面で“切った”時に出来る円

すると、地球儀上に書いた“直角”3角形 (上図右) の3辺の長さ、AB, BC, CA については、

$$AB^2 + BC^2 \neq CA^2$$

つまりピタゴラスの定理が成立しない

また、球面上の三角形の内角の和は180度ではない。上の例では、内角の和は270度。 → 球面が曲がった空間であることを示している

こうした球面上の“異常な”幾何学： 非ユークリッド幾何学

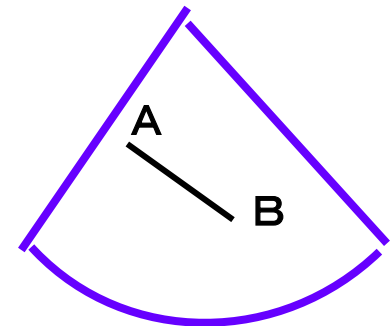
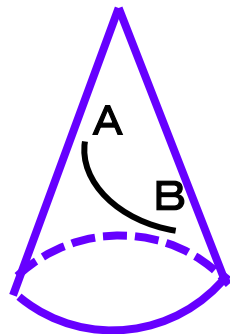
曲がった空間(curved space)と平坦な空間(flat space)の本質的違い

・球面(曲がった空間)

展開出来ない

・円錐(平坦な空間)

展開出来る



展開可能



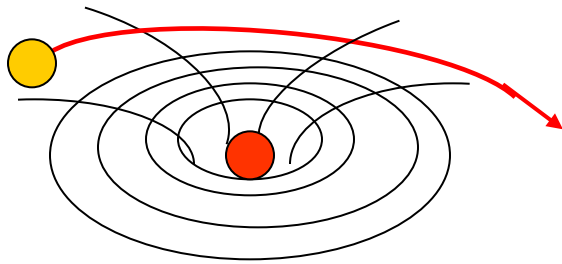
- ・ピタゴラスの定理が成立
- ・三角形の内角の和は180°

一般相対論では、質量（エネルギー）の存在する空間（時空間）は一般にピタゴラスの定理の成立しない**曲がった空間**である、と考える：

（古典物理で重力の存在する空間 → 一般相対論では曲がった空間）

質量をもった物体のまわりの空間は曲がり、“くぼみ”が出来る。

→ その傍らを通過する物体（光さえも！）の進路は曲げられる（下図）：



古典物理

質量を持った2物体間に働く万有引力の為に進路が曲げられた、と考えた



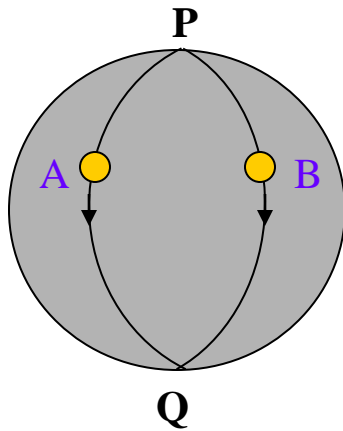
一般相対論

通過する物体には力は働いていないので、（慣性の法則同様）単に曲がった空間での“直線”（測地線）に沿って運動

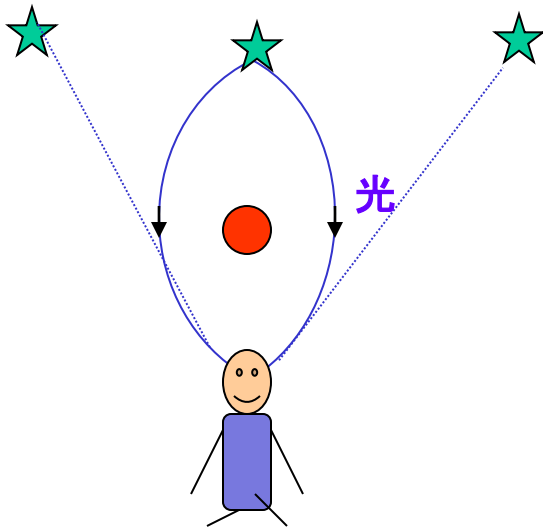
（注）曲がった3次元空間をイメージすることは難しい（出来ない）

(違う方向に投げ出されたボールがぶつかる?!)

曲がった空間の例として、(2次元)球面(地球儀の表面)を考えよう。ある点Pから違った方向に二つのボールA, Bが投げ出されたとする。A, Bはそれぞれ大円(球面上での“直線”)に沿って運動するが、二つの大円は必ず交わるので、**A, Bは又再びQで再会する!** (下図) :

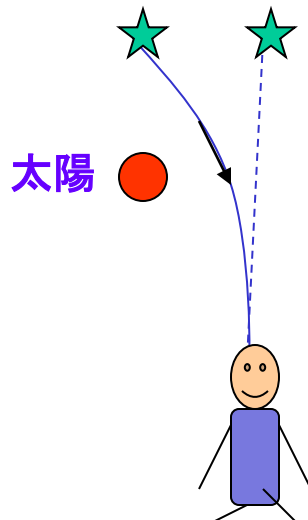


同様に、ある星から異なる方向に出された光線が重い星の両脇を通過したとき、重い星による重力の為に空間が曲がり、通過後に光線が交わることがある(下図) :



こうした現象を「**重力レンズ効果**」と言い、実際に星が2個に分裂して見えることがある事が確認されている。

(有名な一般相対性理論の検証) 皆既日食の時に、太陽付近に現れる星の位置は、太陽の重力による光の湾曲で、太陽がない時の位置からずれる様に見える事が期待される (図) :



一般相対性理論により **1.75 秒** の角度だけ星の位置がずれる事が予言され、実測によりこの予言が正しい事が示され、一般相対性理論を有名にした。

ブラックホール

ビデオ#16： 「曲がった空間とブラックホール」

非常に重くて高密度の星の場合には、その周りの時空間が大きく歪められ、星の中心から一定の距離 a (“粒子の地平線”) 以内には光が入り込めない (その距離まで到達するのに無限の時間がかかってしまう！)。

また逆にその“地平線”内から出発した光は決して外部には出て来れない。つまり遠くから見ると星の中心からの距離 $r < a$ の部分 (地平線の内部) は暗黒の穴の様に見える

→ ブラックホール

「一般相対性理論」：

- 曲がった時空上を物体 (光を含め) がどのように運動するか (進むか) を決定：

測地線方程式

時空 → 物体 (光)

- 逆に、物体や光の存在で時空がどのように曲がるかを決定：

アインシュタイン方程式

物体 (光) → 時空

我々の宇宙も、一般相対性理論によって決定される ！

アインシュタイン方程式：

時空間の構造（曲がり方）やその時間変化（“進化”）を決定する方程式

→ 我々の存在する空間全体である「宇宙」の構造、およびその“歴史”
と“運命”をも決定 ！

“Big Bang 宇宙論”： アインシュタイン方程式の解として得られる

我々の宇宙は、（ほぼ）1点に集中した膨大な質量の、超高温の物質が爆発的に膨張し、急激に冷えて（クーラーの原理と同じ）形成された。

（注）

宇宙の膨張は、ちょうど上方に投げ出されたボールが重力を受けながら運動するのに似ている。宇宙の運命（膨張が止まり収縮に転ずるか、膨張を続けるのか）は宇宙に存在する物質の密度により決まる。

実際には、**ダークマター、ダークエネルギー**も強く関与。

宇宙（少なくとも生まれたての“初期宇宙”）は、膨大な質量の物質による非常に強い重力で空間が大きく曲がり、風船のような曲がった空間になる（ただし3次元）。宇宙（“風船”）のサイズや曲がり方、膨張の仕方はアインシュタイン方程式によって決まる

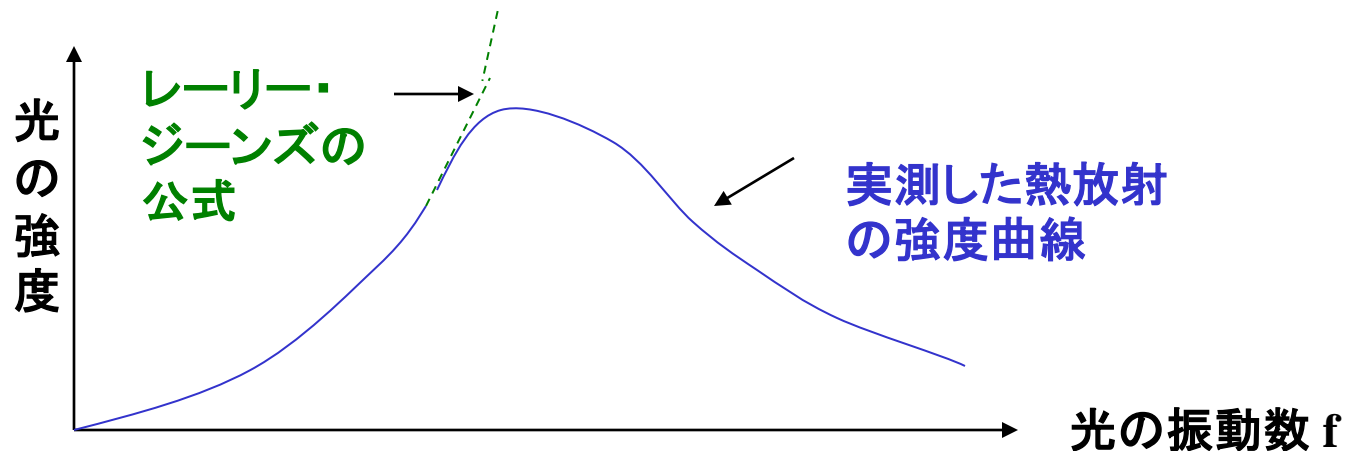
5. エネルギーの量子化と量子力学の誕生

ビデオ# 25 : 光の波動性、ビデオ# 26 : 波動と粒子の二重性

熱放射と古典物理学の破綻

熱せられた熱い物体（白熱電球のフィラメント、遠くの恒星、等）からは、その温度に応じた色（振動数）の光が発せられる：**熱放射（黒体輻射）**

19世紀末のドイツで、「溶鉱炉の温度を、炉中の光の色から判断する」という問題が提起され、物理学者が取り組んだが、古典物理学を用いた結果（**レーリー・ジーンズの公式、等**）では現実をうまく説明出来なかった。特に高い振動数の光の強度が何故弱く成るのか説明が出来なかった。また、振動数が高い極限で光の強度が発散する！（下図）。



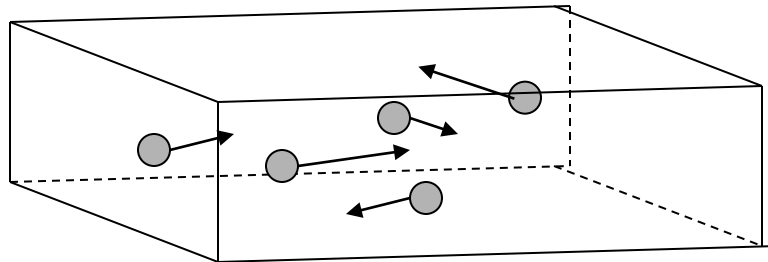
M. Planck の公式 (1900年) とエネルギー量子の考え方

—量子力学の誕生—

(温度とは?)

気温が高い、と我々が感じるのは、空気をつくっている酸素と窒素の分子の運動がそれだけ激しい、つまり運動エネルギーが高い、という事。例えば、容器に入った気体の分子の運動を考える (下図) と、実は勝手ばらばらに運動していて、個々の分子は色々な大きさの運動エネルギーを持っているが、その平均値は、絶対温度 T に比例する：

$$\langle E \rangle \sim k T \quad (k: \text{ボルツマン定数})$$

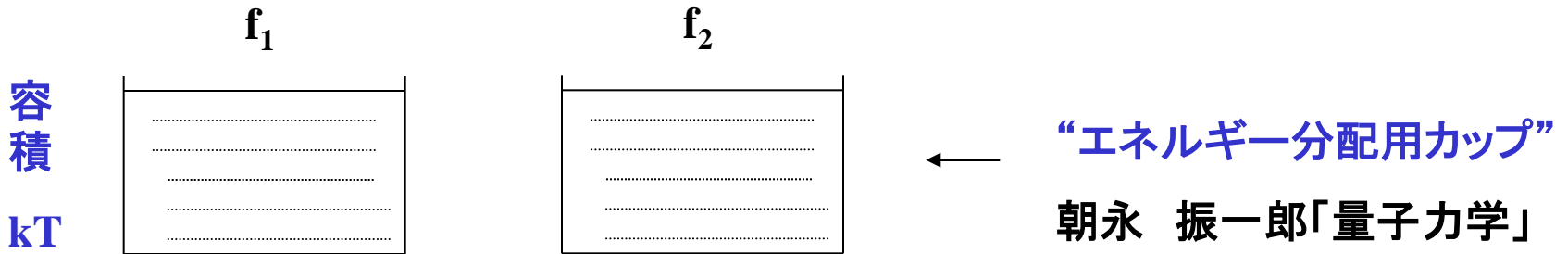


つまり、絶対温度ゼロ度（摂氏 -273 度）の時は、分子は運動しない。

言葉を換えると、古典物理学では、絶対温度 T の場合には、気体の分子には、分子の種類によらず、平均ほぼ kT のエネルギーが分配される、と考えられる：

「等分配の法則」。

光についても、その振動数 f （色）に依らず、どの様な振動数(f_1, f_2, \dots)の光でも、ほぼ kT ずつエネルギーの分配を受ける、と考えられた（下図）：



光のエネルギーは連続的に増え、振動数に依らず、分配用カップが一杯（容量 kT ）になるまでエネルギーを“もらえる”

M. Planck の公式 と エネルギー量子の考え方

M. Planck は実測された熱放射の強度曲線を見事に再現する「Planck の公式」を導いただけでなく、この公式の元になる考え方として

「エネルギー量子」

という考え方を導入した（1900年、Planck 50歳）

→ 量子力学（量子物理学）の誕生

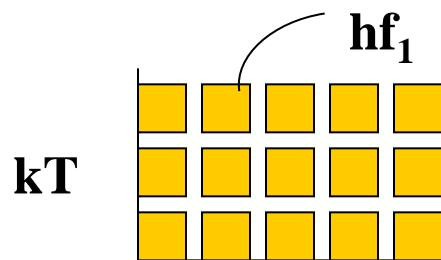
これは、光のエネルギーは連続的に変化できず、振動数が f の場合には、“基本単位” hf （“エネルギー量子”）の整数倍のみをとりうる

$$E = n(hf)$$

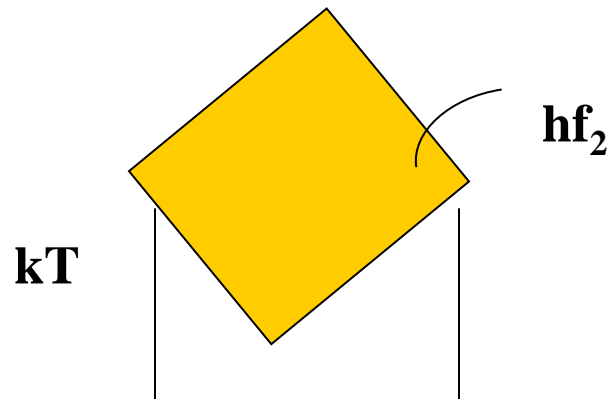
$$(h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ (J}\cdot\text{s)} : \text{Planck 定数}, n = 0, 1, 2, \dots)$$

という画期的な考え方であった（エネルギーの“つぶつぶ”化）。

こう考えると、特に振動数 f の高い（大きい）光の場合には、エネルギー分配用の“コップ”にエネルギーのつぶ（最小単位 hf ）が入りきらずに、当分配の法則が崩れる（下図）：



f_1 : 小

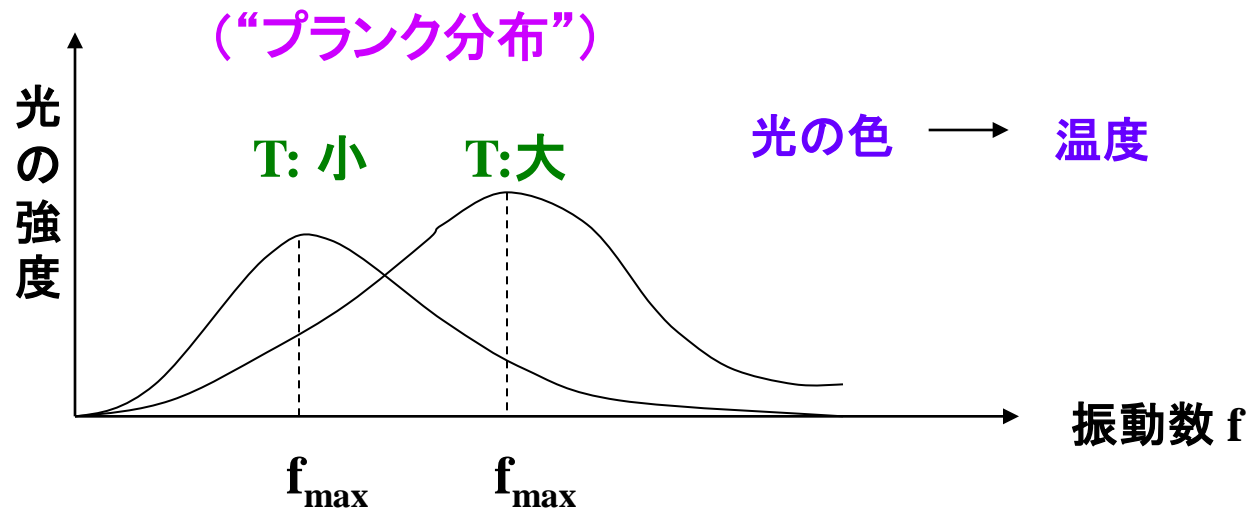


f_2 : 大

こうして、M. Planck は、なぜ高い振動数の光の強度（エネルギー）が弱いのかを説明する事が出来た。また、一番強度の強い光の振動数 f_{\max} は、エネルギー量子が分配カップの容積とほぼ等しく成る時の振動数になる：

$$h f_{\max} \sim kT \quad \rightarrow \quad f_{\max} \propto T$$

よって、温度が高くなると f_{\max} も増加するので、熱放射している物体の色（ f_{\max} で決まる）も赤から徐々に青っぽくなって行く（下図）：



（注）宇宙から来る光（正確には電波、“宇宙背景放射”）を観測するとプランク分布に従っている！また、その分布から現在の宇宙の温度は $T = 2.7$ 度である事が分かっている（後出）

(“光” (電磁波) の種類)

振動数が高い → 波長が短い

波長 (m)

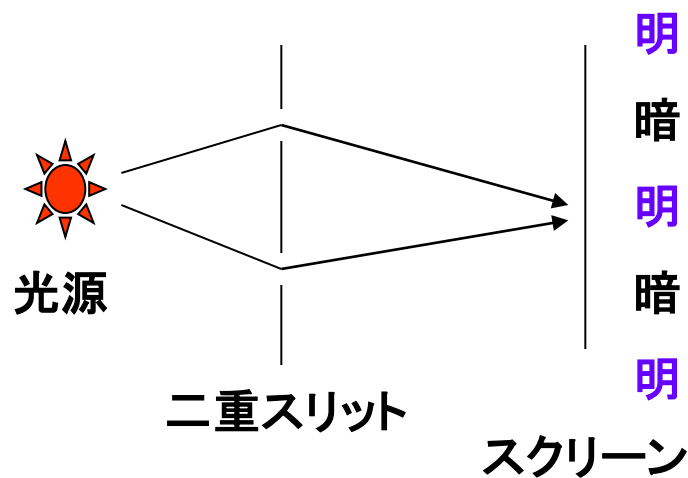
電波	$10^{-3} \sim 10^4$
赤外線	$10^{-6} \sim 10^{-4}$
可視光 (光)	10^{-6}
紫外線	10^{-7}
X線	10^{-10}
γ 線	$< 10^{-10}$ (放射性原子核の γ 崩壊、素粒子の崩壊)

よって、可視光より紫外線の方が振動数が高く、従ってエネルギー量子 hf が大きい → 紫外線は肌に良くない

6. 量子力学における新しい概念

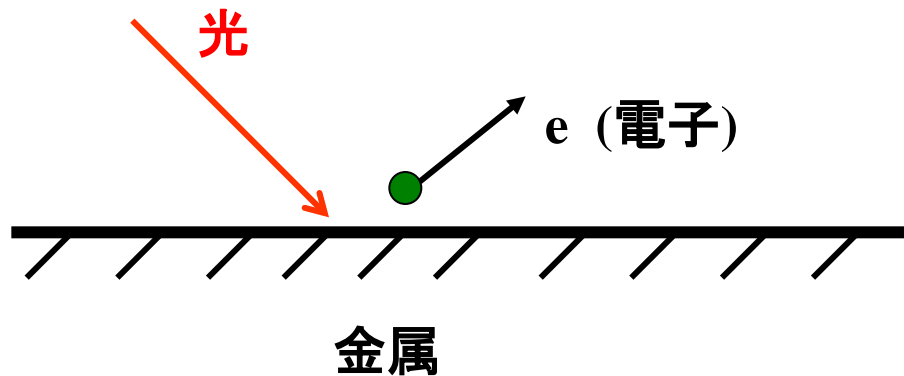
光の粒子性

Newton の時代に、光は波（波動）であるか、或いは粒子であるか、について論争があったが、**ヤングの実験**（二重スリットを通過した光の干渉によってスクリーン上に明暗の模様が出来る）によって、光りの「波動性」が確立した、と思われていた（ビデオ# 25：光の波動性）：



(「光電効果」 と Einstein による光子仮説)

光電効果： 紫外線やX線のような振動数の高い（波長の短い）光を金属に当てると、金属から電子が飛び出す現象。



特徴：

ア． 光の振動数 f がある振動数 f_0 より小さいと、いくら強い光を当てても電子は飛び出さない。

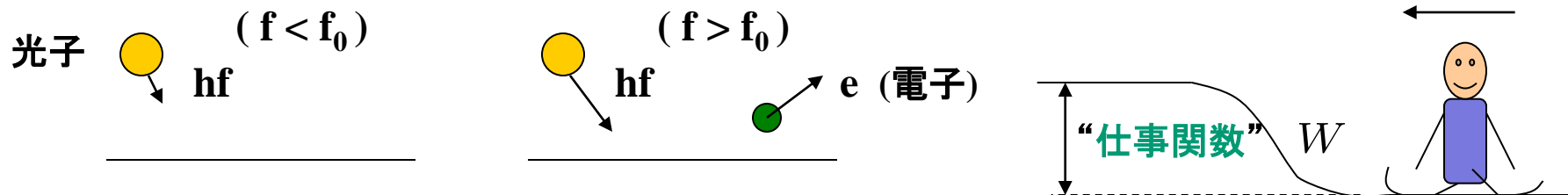
イ． 飛び出した電子の（運動）エネルギーは、光の強さに無関係で、光の振動数にのみ依存。

こうした特徴は、古典物理では説明が難しいが、これを、**A. Einstein** は、

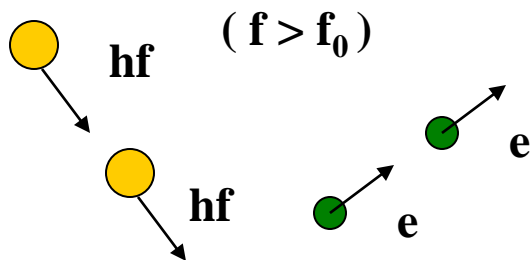
「振動数 f の光は、 $E = hf$ (h : プランク定数) のエネルギーを持った粒子、光子 (photon)、の集まり」

という**光子仮説**によって見事に説明した (これによってノーベル賞) (下図) :

(ア)



(イ)



$$W = hf_0 \quad \text{と書くと}$$
$$hf > W \quad \leftrightarrow \quad f > f_0$$

だと電子(光電子)が飛び出す

(注) こう考えると、Planck の言った $E = n(hf)$ は、光子が n 個ある、という事になる。

光： 波動 → 粒子性 !

電子の波動性

では、今まで粒子と考えられていた電子などの“物質”も逆に波動性、を持つのではないか？： de Broglie (ド・ブロイ) による“物質波”の仮説

この仮説の正しさは、実験的に確かめられた (ヤングの実験での光源を電子源に置き換えても、2重スリットを通すと光の場合と同じ干渉模様が出現)。

物質波の振動数 f と波長 λ は、以下の関係で与えられる：

$$f = \frac{E}{h} \quad (E = hf \text{ と同じ関係})$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (p: \text{運動量の大きさ})$$

(注)

1. 運動量の大きい速い電子ほど物質波の波長は短くなる
→ ミクロの世界 → 電子顕微鏡の原理
2. 上式のそれなりの説明。光速で運動する粒子については $E = cp$ (相対論)。一方、 $c = f\lambda$ (波の基本式) よって

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c}{\frac{E}{h}} = \frac{h}{\frac{E}{c}} = \frac{h}{p}$$

粒子性と波動性はどう両立し得るか？

波動性： 広がりがあある、直進しない（回折）、干渉

粒子性： 広がりがない、直進する、干渉しない

全く異なる！ どのように両立可能 ？

→ 電子が検出される時はあくまで広がりのない粒子として検出されるが、古典物理の時と違い、その運動の径路は一意的でなく、確率的に分布する。その確率の分布の様子が波動（確率波、複素数！）として表される、という事。

しかし、アインシュタインは、自身が量子力学の建設に大いに寄与したにも関わらず、「神がサイコロを振るとは思わない」と言って、この確率的な解釈に最後まで納得していなかった、という。

ボーアの原子模型

ビデオ# 27 : 原子モデル

原子核の周りを回る電子は光を出してだんだん半径の小さな軌道に

→ 原子はつぶれてしまう！ なぜ原子は安定でいられるか？

(原子のスペクトル)

また、水素原子からは特定の振動数の光（スペクトル）だけが放出されている事が知られていた。なぜ振動数が連続的に変化しないか不可解であった。

(ボーアの原子模型)

ボーアは、電子のエネルギーは連続的には変化せず、特定のエネルギー、つまり特定の半径の軌道のみを採ることが出来ると主張。軌道が“急に”変わる時にそのエネルギーの差に応じた特定のエネルギーの光子を放出する、と考える、スペクトルの説明に成功した：

$$E_n - E_m = h f \rightarrow f = (E_n - E_m) / h \quad (\text{エネルギー保存則})$$

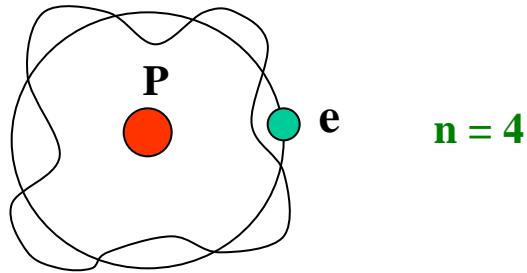
(E_n : n 番目の軌道の時の電子のエネルギー)

de Broglie は“物質波”の考えを用いて、何故特定のエネルギーのみを採るのか、について解明した。

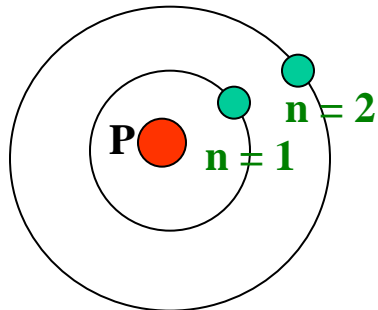
電子が陽子を中心とする半径 r の円軌道を回っているとすると、この時、軌道にそって物質波が生じるが、その波長 λ が

$$2\pi r = \frac{\lambda \times n}{h} \quad (n=1, 2, \dots)$$
$$r \times p = \frac{h}{2\pi} \times n \quad (\text{ボーアの量子化条件})$$

の関係を満たす時にのみ、物質波が消えずに残る（そうでないと、何度も円周上を回るうちに物質波が干渉して消えてしまう）（下図）：



→ この関係を満たす特定の軌道（特定の半径 r ）、特定のエネルギーのみが許される（下図）：



(注)実際には軌道は確定せず、ある半径の周りに確率的に分布

→ 量子力学でメンデレーエフの「**周期律**」を説明可！