線形計画問題

制約条件が 1 次の等式あるいは不等式で表されるときに，1 次関数である目的関数を最大化（あるいは最小化）する問題.

講義内容

LP1 線形計画問題による定式化の例

LP2 諸定義（可能解，最適解，標準形，基底解，基底変数，非基底変数，基底可能解）

LP3 シンプレックス法

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

LP1 線形計画問題による定式化の例

［例 1］

- 3 種類の材料 1 ∼ 3 から 2 種類の商品 1, 2 を作る.
- 商品 j を 1 単位作るのに，材料 i が a_{ij} だけ必要 $(i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2)$.
- 材料 i の使用可能量は全部で b_i.
- 商品 j の 1 単位あたりの売り上げは c_j.
- 総売り上げを最大にしたい.

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

各商品 j を x_j 単位作るものとする（$j = 1, 2$）.

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

- 商品 j を 1 単位作るのに，材料 i が a_{ij} 必要.
  $\Rightarrow$ x_j 単位作るのに，材料 i が $a_{ij}x_j$ 必要.
- 材料 i の使用可能量は全部で b_i.
  $\Rightarrow$ 商品 1, 2 のための使用量の和を考えると，
  $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i. \quad (i = 1, 2, 3)$$
- 商品 j の 1 単位あたりの売り上げは c_j.
  $\Rightarrow$ 総売り上げは $c_1x_1 + c_2x_2$.

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

結局，以下の問題を解けばよいことになる.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\leq b_3, \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

という制約条件のもとで，目的関数

$$c_1x_1 + c_2x_2$$

を <u>最大</u> にするような x_1, x_2 を求めよ.

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

とおくと，

目的関数：$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \longrightarrow$ 最大
制約条件：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

と書くことができる（^{T} は転置を表す）.

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

［例 2］

- 4 種類の食品 $F_1 \sim F_4$ から 3 種類の栄養素 $N_1 \sim N_3$ をとる.
- 1 単位の食品 F_j には，栄養素 N_i が a_{ij} 含まれる $(i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3, 4)$.
- 栄養素 N_i の最低必要量は b_i.
- 1 単位の食品 F_j の価格は c_j.
- 総費用を最小にして，最低限必要な栄養素をとりたい.

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

各食品 F_j を x_j 単位買うものとする．

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

- 1 単位の食品 F_j には，N_i が a_{ij} 含まれる．
  $\Rightarrow$ x_j 単位には，N_i が $a_{ij}x_j$ 含まれる．
- 栄養素 N_i の最低必要量は b_i．
  $\Rightarrow$ 4 種類の食品中の N_i の量を考えると，
  $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \geq b_i.$$
- 1 単位の食品 F_j の価格は c_j．
  $\Rightarrow$ 総費用は $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

以下の問題を解けばよいことになる．

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &\geq b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &\geq b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &\geq b_3,
\end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

という制約条件のもとで，目的関数

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

を 最小 にするような x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

とおくと，

目的関数：$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \longrightarrow$ 最小
制約条件：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

となる．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

LP2　諸定義

LP2.1　可能解と最適解

- 実行可能解，可能解（feasible solution）：全ての制約条件を満たすベクトル
- 可能領域（feasible region）：可能解全体の集合
- 最適解（optimum solution）：最大化問題の場合，全ての可能解の中で目的関数の値を最大にするもの．最小化問題の場合，全ての可能解の中で目的関数の値を最小にするもの．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

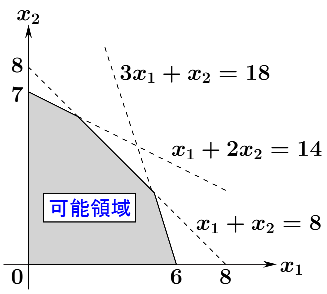
［例 3］

制約条件

$x_1 + 2x_2 \leq 14$
$x_1 + x_2 \leq 8$
$3x_1 + x_2 \leq 18$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

目的関数

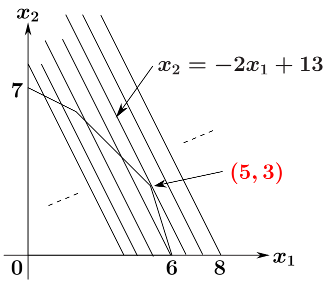
$2x_1 + x_2 \rightarrow$ 最大



$K \triangleq 2x_1 + x_2$ とおく $\Rightarrow x_2 = -2x_1 + K$．

K の値をいろいろ変えて，傾き -2 の直線を書き込むと，可能領域を通るものの中で K の値が最大になるのは

$x_2 = -2x_1 + 13$.



この直線は，可能領域内の点 $(5, 3)$ を通るので，最適解は $(x_1, x_2) = (5, 3)$．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

［例 4］

制約条件

$x_1 + 2x_2 \geq 6$

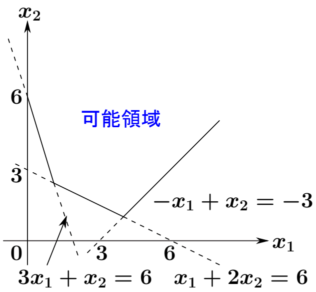
$-x_1 + x_2 \geq -3$

$3x_1 + x_2 \geq 6$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

目的関数

$x_1 + x_2 \to$ 最小

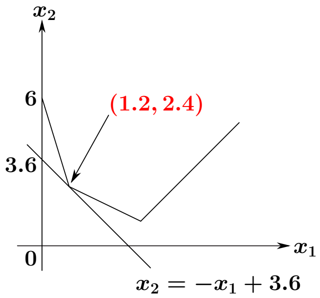


$K \triangleq x_1 + x_2$ とおく $\Rightarrow x_2 = -x_1 + K$.

例 3 と同様に，傾き -1 の直線を考えると，可能領域を通るものの中で K の値が最小になるのは

$x_2 = -x_1 + 3.6.$

この直線は，可能領域内の点 $(1.2, 2.4)$ を通るので，最適解は $(x_1, x_2) = (1.2, 2.4)$.



−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

LP2.2　標準形

以下の形式を標準形（standard form）と呼ぶ.

$$\text{目的関数：}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \longrightarrow \text{最小}$$
$$\text{制約条件：}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{x}$：変数の n 次元ベクトル

$\boldsymbol{A}$：$m \times n$ 定数行列

$\boldsymbol{b}$：m 次元定数ベクトル

$\boldsymbol{c}$：n 次元定数ベクトル

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

非標準形を標準形に直すことは容易にできる.

(1) 不等式制約条件がある場合

$$x_1 + 2x_2 \leq 14,\quad x_1 + x_2 \leq 8,$$
$$3x_1 + x_2 \leq 18,\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 14,\ \ x_1 + x_2 + x_4 = 8,$$
$$3x_1 + x_2 + x_5 = 18,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

このような変数 x_3, x_4, x_5 のことをスラック変数（slack variable）と呼ぶ.

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

$$x_1 + 2x_2 \geq 6,\quad -x_1 + x_2 \geq -3,$$
$$3x_1 + x_2 \geq 6,\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 6,\quad -x_1 + x_2 - x_4 = -3,$$
$$3x_1 + x_2 - x_5 = 6,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

このような変数 x_3, x_4, x_5 のことを剰余変数（surplus variable）と呼ぶ.

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

(2) 非負条件がない変数がある場合

そのような各変数 x_i に対して，二つの非負変数 x_i', x_i'' を作り，x_i を $x_i' - x_i''$ で置き換える.

(3) 最大化問題である場合

次の例のように，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ の最大化は $(-\boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x}$ の最小化に変える.

$$2x_1 + x_2 \to \text{最大}$$
$$\Downarrow$$
$$-2x_1 - x_2 \to \text{最小}$$

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

［例 5］例 3 の問題を標準形に直すと，以下のようになる.

$$\text{目的関数：}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \longrightarrow \text{最小}$$
$$\text{制約条件：}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

ただし，

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 18 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

標準形に関して，次の二つの仮定をする．

- $n > m$．すなわち，変数の個数は，変数の非負条件以外の制約条件の個数より大きい．
- 制約条件の中に，他の条件式を組み合わせて得られるような冗長なものがない．

これ以降，上記の仮定を満たすような，標準形の線形計画問題について考える．

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

LP2.3　基底解，基底可能解

$$\text{目的関数：} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \longrightarrow \text{最小}$$
$$\text{制約条件：} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

- ベクトル$\boldsymbol{x}$の n 個の成分 x_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を，m 個と $n-m$ 個のグループに分け，それぞれのグループについて，成分を並べたベクトルを$\boldsymbol{x_B}$, $\boldsymbol{x_N}$と表す．
- そのグループ分けに対応して，$\boldsymbol{A}$を $m \times m$ 行列と $m \times (n-m)$ 行列に分けたものを，それぞれ，$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{N}$と表す．

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

［例 6］例 5 の問題における$\boldsymbol{x}$の 5 $(= n)$ 個の成分を，3 $(= m)$ 個の成分 x_1, x_3, x_4 と 2 $(= n-m)$ 個の成分 x_2, x_5 に分けたとすると，$\boldsymbol{x_B}$, $\boldsymbol{x_N}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{N}$ は以下のようになる．

$$\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x_N} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

- 制約条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は
$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{b}$$
と書き直すことができる．
$\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{0}$ とおくと，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{b}$．よって，このとき，$\boldsymbol{B}$が正則であれば，$\boldsymbol{x_B}$の値は一意に $\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ と定まる．
このようにして得られる特殊な解を基底解（basic solution）と呼ぶ．
また，$\boldsymbol{x_B}$の各成分を基底変数（basic variable），$\boldsymbol{x_N}$の各成分を非基底変数（nonbasic variable）という．

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

［例 7］例 5 の問題において，

$$\boldsymbol{x_N} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とすると，

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 18 \end{bmatrix}$$

この方程式を解くと，$x_1 = 6,\ x_3 = 8,\ x_4 = 2$．これに $x_2 = 0,\ x_5 = 0$ をあわせたものが一つの基底解をなす．

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

$$\boldsymbol{x_N} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とすると，

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 18 \end{bmatrix}$$

これを解くと，$x_2 = 8,\ x_3 = -2,\ x_5 = 10$．よって，$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 8, -2, 0, 10)$ は一つの基底解．ただし，これは可能解ではない．

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

- 一般に，可能解は無限に存在するが，基底解の個数は有限（高々${}_nC_m$ 個）．
- 基底解は可能解であるとは限らない．基底解のうち，可能解でもあるものを基底可能解（basic feasible solution）と呼ぶ．

次の定理が成立する（証明は省略）．

［定理］線形計画問題が最適解をもつならば，基底可能解の中に最適解が存在する．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−

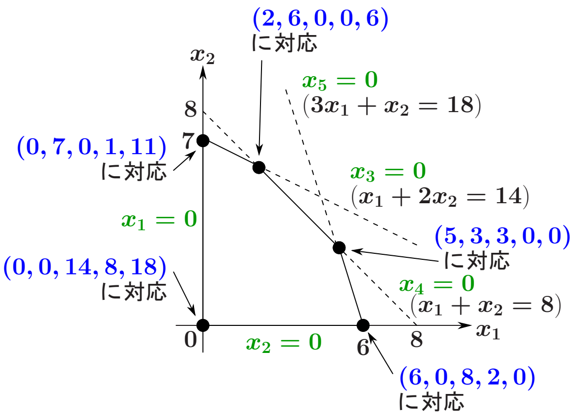
［例 8］例 5 の問題の場合，以下のように，基底解は ${}_5C_3 = 10$ 個ある．

基底可能解（可能領域の頂点に対応）

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 14, 8, 18), (0, 7, 0, 1, 11),$
$(6, 0, 8, 2, 0)$，$(2, 6, 0, 0, 6)$，$(5, 3, 3, 0, 0)$

可能解でない基底解

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 8, -2, 0, 10),$
$(0, 18, -22, -10, 0)$，$(14, 0, 0, -6, -24)$，
$(8, 0, 6, 0, -6)$，$(22/5, 24/5, 0, -6/5, 0)$



−−−−−−−−−−−−−−−−−−

LP3　シンプレックス法

標準形の線形計画問題の最適解をシンプレックス法（simplex method）により求める手順について，例 5 の問題を例として用いながら説明していく．

［シンプレックス法の概略］

Step.1： 基底可能解を一つ見つける．

Step.2： この基底可能解が最適解かどうかの判定を行う．最適解であれば終了．

Step.3： より良い基底可能解を求め，Step.2 へ行く．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−

Step.1　最初の基底可能解を見つける．

- 一般の問題に対する方法は必ずしも自明なものではないが，ここでは省略する．
- （変数の非負条件以外の）各制約条件がスラック変数を含んでいる場合などには，このステップは簡単に実行することができる．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−

［例 9］例 5 で述べた問題は以下のとおり．

制約条件

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 14$

$x_1 + x_2 + x_4 = 8$

$3x_1 + x_2 + x_5 = 18$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$

目的関数：$-2x_1 - x_2 \to$ 最小

この場合，$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 14, 8, 18)$ は基底可能解である．

この基底可能解に対し，$\boldsymbol{x_B}$, $\boldsymbol{x_N}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{N}$は以下のようになる．

$$\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x_N} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

−−−−−−−−−−−−−−−−−−

Step.2　基底可能解の最適性の判定

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{b}$$

であるので，

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N}$$

である（基底変数を非基底変数の関数として表している）．これにより，目的関数を，非基底変数のみの関数として表すことができる．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

$\boldsymbol{x}$の（$\boldsymbol{x_B}$と$\boldsymbol{x_N}$ への）分割に対応して，目的関数の係数ベクトル$\boldsymbol{c}$も，$\boldsymbol{c_B}$と$\boldsymbol{c_N}$に分割する．

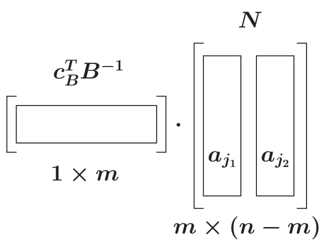
$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{c_N}^T\boldsymbol{x_N} \\ &= \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c_N}^T - \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x_N} \\ &= z_0 + \Sigma_{j\in NS}\ (c_j - z_j)x_j\end{aligned}$$

ただし，ここで

$z_0 = \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$：現在の基底可能解に対する目的関数値,

NS：非基底変数の添字の集合,

$z_j = \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a_j}$（$\boldsymbol{a_j}$は行列$\boldsymbol{A}$の第 j 列ベクトル）．



−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = z_0 + \Sigma_{j\in NS}\ (c_j - z_j)x_j$$

各 $j \in NS$ について，$c_j - z_j$ は，非基底変数 x_j の変化に対する目的関数の変化率を示す．

すべての $j \in NS$ について $c_j - z_j \geq 0$ であるとき，任意の可能解を$\boldsymbol{x'}$，その目的関数値を z' とすると，

$$z' = z_0 + \Sigma_{j\in NS}\ (c_j - z_j)x_j \geq z_0.$$

よって，現在の基底可能解は最適解である．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

Step.3　解の改良

$c_j - z_j < 0$ であるような値 $j \in NS$ が存在するとき，それらのうち，$c_j - z_j$ が最小となるものを一つ選んで p とする．

x_p 以外の非基底変数の値を 0 のままにしておいて，x_p の値を 0 から Δ (≥ 0) に増加させることにより，目的関数の値を

$$(z_p - c_p)\Delta$$

だけ減少させ得る．Δ の値は，可能解でなくならない範囲で，最大になるように決める．
（これにより，x_p は基底変数に変わり，他のある変数が非基底変数に加わる.）

Step.2 に戻る．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

（例 9 の続き）

Step.2（1 回目）

例 5 で述べた問題と基底可能解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 14, 8, 18)$ に対して，目的関数 z は

$$z = -2x_1 - x_2 \tag{1}$$

（この場合 $z_0 = 0$）．x_1, x_2 のいずれの係数も負であるから，最適解ではない．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

Step.3（1 回目）

$p = 1$ とする（p_1 を基底変数に変えていく）．基底変数 x_3, x_4, x_5 を非基底変数 x_1, x_2 で表すと，

$$\begin{aligned} x_3 &= 14 - x_1 - 2x_2, && (2) \\ x_4 &= 8 - x_1 - x_2, && (3) \\ x_5 &= 18 - 3x_1 - x_2 && (4) \end{aligned}$$

となる．よって，$x_2 = 0$ としたまま，x_1 $(= x_p)$ の値を Δ (> 0) まで増加させると，

$x_3 = 14 - \Delta$, $x_4 = 8 - \Delta$, $x_5 = 18 - 3\Delta$

となる．

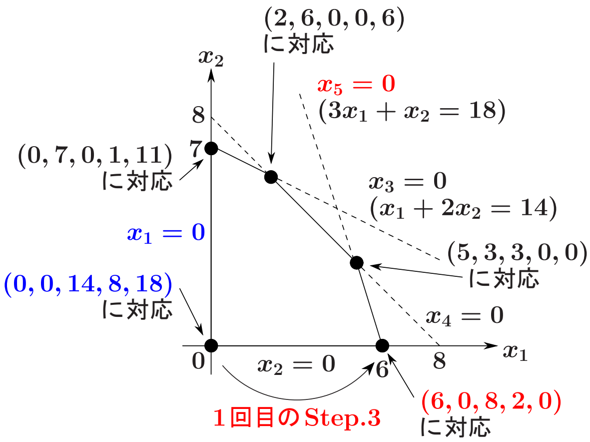
$x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$ である範囲で Δ の値を最大にするので，

$$\Delta = 6.$$

これにより，新しい基底可能解

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (6, 0, 8, 2, 0)$$

が得られる．このときの目的関数値は -12．x_1 が基底変数に加わり，x_5 が非基底変数に変わっている．



−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

Step.2（2 回目）

式 (4) を変形して

$$x_1 = 6 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5 \tag{5}$$

を得る．これを式 (1) に代入すると，

$$z = -12 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_5 \tag{6}$$

となる．x_2 の係数が負であるから，最適解ではない．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

Step.3（2 回目）

$p = 2$ とする．式 (5) を式 (2), (3) の右辺に代入し，整理すれば

$$x_3 = 8 - \frac{5}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_5 \tag{7}$$

$$x_4 = 2 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_5 \tag{8}$$

となる．式 (5), (7), (8) において，$x_2 = \Delta$, $x_5 = 0$ とすると，

$$x_1 = 6 - \frac{1}{3}\Delta, \quad x_3 = 8 - \frac{5}{3}\Delta, \quad x_4 = 2 - \frac{2}{3}\Delta$$

となる．

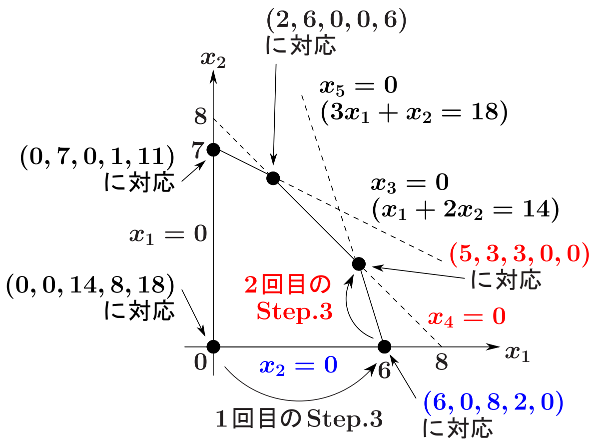
$x_1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ である範囲で Δ の値を最大にするので，

$$\Delta = 3.$$

これにより，新しい基底可能解

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (5, 3, 3, 0, 0)$$

が得られる．このときの目的関数値は -13．x_2 が基底変数に加わり，x_4 が非基底変数に変わっている．



−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

Step.2（3 回目）

式 (8) を変形して

$$x_2 = 3 - \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \tag{9}$$

を得る．これを式 (6) に代入すると，

$$z = -13 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \tag{10}$$

となる．x_4, x_5 のいずれの係数も非負であるから，

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (5, 3, 3, 0, 0)$$

は最適解である．終了．

−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−