

Trudinger-Moser 不等式の最大化問題の境界非線形項

京都大学数理解析研究所
中西賢次

本講演では論文 [4] について解説する。Trudinger-Moser 不等式は、臨界 Sobolev 不等式の増大度に関する精密化として良く知られている。単位円板 D 上では、

$$\forall u \in H_0^1(D), \quad \|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 \leq 4\pi \implies \int_D e^{|u|^2} dx \leq C_D \quad (1)$$

となる正定数 C_D が存在し、非線形項 e^{u^2} の増大度は最良である [5]。平面 \mathbb{R}^2 上では、

$$\forall u \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq 4\pi \implies \int_{\mathbb{R}^2} e^{|u|^2} \min(|u|^{-2}, |u|^2) dx \leq C_E \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx \quad (2)$$

となる正定数 C_E が存在し、この非線形増大度も最良である [3]。これらの不等式で最良定数 C を達成する u が存在するか否かを一般的の非線形項で考える。 C_D が達成されることを [1] により示されたが、その証明は $e^{|u|^2}$ が最大化問題ではギリギリの境ではないことを示唆していた。実際 [6] は、 $e^{|u|^2}(1-O(|u|^{-p}))$ の形なら $p=2$ が境となり、非線形項がそれより大きければ最大化元が存在し、小さければ存在しないことを示した。

[4] では、 $|u|$ が小さい所の非線形項を切り捨てることで境界を更に精密化し、第 3 項の係数まで決定した。最大化元存在の境界となる非線形項の $|u| \rightarrow \infty$ での漸近挙動はそれぞれ

$$\begin{cases} \text{円板 } D : e^{|u|^2} \{1 - |u|^{-2} - (\frac{3}{2} + 2\zeta(3))|u|^{-4} + O(|u|^{-6})\}, \\ \text{平面 } \mathbb{R}^2 : e^{|u|^2} \{|u|^{-2} - (4 + 2\zeta(3))|u|^{-6} + O(|u|^{-8})\} \end{cases} \quad (3)$$

で与えられる (ζ は Riemann ゼータ関数)。特に \mathbb{R}^2 の場合は展開第 2 項 ($O(|u|^{-4})$) が消えるため、(2) の非線形項は (1) より境界に近く、 C_E の最大化元存在を示すには第 3 項 ($O(|u|^{-6})$) の符号が必要。

証明は、球対称化の後、Dirichlet エネルギー $\|\nabla u\|^2$ を等分する $r = |x|$ における高さ $h > 0$ を制約パラメータとして空間領域を内側と外側に分離し、それぞれの変分問題を集約 $h \rightarrow \infty$ に対して漸近展開する。2 等分でエネルギーが減って劣臨界（コンパクト性）になり、外側では高さ h を最大化する線形問題（球対称 Sobolev 不等式の指版）、内側ではエネルギーのみの最大化問題となる所がポイントで、それぞれ Euler-Lagrange 方程式を用いて漸近挙動を調べる（但し D 上の外側問題はほぼ自明）。

なお、 $|u|$ が小さい所の非線形項を切り捨てなくとも、第 2 項の展開までなら、外側では非線形項を無視して最大の高さ h を目指すのが得策である事が分かる。しかし第 3 項まで考えると、外側の非線形エネルギーが最大化元にも影響し、内側と外側の本質的な相互作用が顕れる。円板上の $u \rightarrow 0$ での非線形項の境界については [2] を参照。

内側の非線形問題は、線形指数 e^{cu} で非線形項を近似すると具体的に解けて、対数座標 $t = -\log r$ において 2 回微分 \ddot{u} がソリトン $-\operatorname{sech}^2(t-T)$ の形になる。この事は [1] でも使われているが、展開第 3 項はそこからのズレで与えられるため、ソリトン周りの線形化作用素を用いて具体的に計算する。最大化元のズレは二重対数関数（dilogarithm）で与えられるため、全ての積分計算を初等関数で実行することはできないが、展開係数は求めることができる。[4] の計算はゴリ押し展開により多くの謎な相殺項を生じているが、近似ソリトンの位置を直交条件で調整すると若干見通しを改善できるのでそれについて説明したい。また時間があれば L^p 版でどこまでできるかについても述べたい。

REFERENCES

- [1] Lennart Carleson, Sun-Yung A. Chang, *On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser*, Bull. Sci. Math. (2) **110** (1986), no. 2, 113–127.
- [2] Masato Hashizume, *Maximization problem on Trudinger-Moser inequality involving Lebesgue norm*. J. Funct. Anal. **279** (2020), no. 2, 108513, 30 pp.
- [3] Slim Ibrahim, Nader Masmoudi, Kenji Nakanishi, *Trudinger-Moser inequality on the whole plane with the exact growth condition*. J. Eur. Math. Soc. **17** (2015), no. 4, 819–835.
- [4] Slim Ibrahim, Nader Masmoudi, Kenji Nakanishi, Federica Sani, *Sharp threshold nonlinearity for maximizing the Trudinger-Moser inequalities*. J. Funct. Anal. **278** (2020), no. 1, 108302, 52 pp.
- [5] J. Moser, *A sharp form of an inequality of N. Trudinger*. Indiana Univ. Math. J. **20** (1971) 1077–1092.
- [6] Pierre-Damien Thizy, *When does a perturbed Moser-Trudinger inequality admit an extremal?* Anal. PDE **13** (2020), no. 5, 1371–1415.

Existence and non-existence of elastic graphs with the symmetric cone obstacle

Kensuke Yoshizawa[†] (Tohoku University)

For a curve written as the graph of $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, the elastic energy of the curve $(x, u(x))$ is given by

$$\mathcal{W}(u) := \int_0^1 \kappa_u(x)^2 \sqrt{1 + u'(x)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \sqrt{1 + u'(x)^2} dx,$$

where κ_u denotes the curvature of the curve $(x, u(x))$. We are concerned with the minimization problem for \mathcal{W} with the unilateral constraint that the curve lies above a given function $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(M) \quad \min_{v \in M_{\text{sym}}} \mathcal{W}(v),$$

where M_{sym} is a convex set of $H(0, 1) := H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$ as follows:

$$M_{\text{sym}} := \{ v \in H(0, 1) \mid v \geq \psi \text{ in } [0, 1], \quad v(x) = v(1-x) \text{ for } 0 \leq x \leq 1 \}.$$

Let us call $\psi \in C([0, 1])$ **symmetric cone** if $\psi(x) = \psi(-x)$ and ψ is affine on $(0, \frac{1}{2})$. Throughout this talk we assume that the obstacle function belongs to

$$\text{SC} := \{ \psi \in C([0, 1]) \mid \psi(0) < 0, \quad \psi(\frac{1}{2}) > 0, \quad \text{and } \psi \text{ is symmetric cone} \}.$$

In this talk, we say that u is a solution of (M) if $u \in M_{\text{sym}}$ attains $\inf_{v \in M_{\text{sym}}} \mathcal{W}(v)$. It is shown in [1] that if $\psi \in \text{SC}$ satisfies $\psi(\frac{1}{2}) < c_*$, (M) has a solution and solutions are concave. Moreover, [3] showed that if $\psi \in \text{SC}$ satisfies $\psi(\frac{1}{2}) > c_*$, (M) has no solution. Here

$$(1) \quad c_* := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} \simeq 0.834626.$$

However, (M) has several open problems, such as *uniqueness* of solutions, *solvability when $\psi(\frac{1}{2}) = c_*$* , and whether the *regularity* of minimizers can be improved up to $C^\infty(0, 1)$. The aim of this talk is to solve these problems of (M).

We are ready to state our main result of this talk:

Theorem 1 ([4]). Let $\psi \in \text{SC}$ and let c_* be the constant given by (1).

- (i) If $\psi(\frac{1}{2}) \geq c_*$, (M) has no solution.
- (ii) If $\psi(\frac{1}{2}) < c_*$, (M) has a unique solution u and u satisfies $u \notin C^3(0, 1)$.

Remark 2. (a) Theorem 1 gives complete classification of existence and nonexistence of minimizers in terms of the size of obstacle. By [2], the same uniqueness and nonexistence result is obtained in a different way; he focuses on the curvature and the proof is more geometric.

(b) Without obstacle, minimizers of \mathcal{W} satisfy the Euler-Lagrange equation for \mathcal{W} on $(0, 1)$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{\kappa'_u(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} \right) + \frac{1}{2} \kappa_u^3(x) = 0$$

and the regularity of minimizers can be improved up to $C^\infty(0, 1)$ with the help of bootstrap argument. However, due to the obstacle we cannot apply the same argument to solutions of (M). Theorem 1 (ii) implies that the obstacle induces the lack of the regularity.

References

- [1] A. Dall'Acqua and K. Deckelnick, *An obstacle problem for elastic graphs*, SIAM J. Math. Anal. **50** (2018), no. 1, 119–137.
- [2] T. Miura, *Polar tangential angles and free elasticae*, Math. Eng. **3** (2021), 1–12.
- [3] M. Müller, *An obstacle problem for elastic curves: existence results*, Interfaces Free Bound **21** (2019), no. 1, 87–129.
- [4] K. Yoshizawa, *A remark on elastic graphs with the symmetric cone obstacle*, SIAM J. Math. Anal. **53** (2021), no. 2, 1857–1885.

[†] kensuke.yoshizawa.s5@dc.tohoku.ac.jp

Split Bregman methodに基づく4階の全変動流問題に対する数値計算

Yoshikazu Giga* and Yuki Ueda†

画像処理や結晶成長の記述に用いられる4階の全変動流問題に対する数値計算を行う。本講演では、2階の全変動問題に対する計算手法であるsplit Bregman method(例えば[3])の枠組みに基づいた新たな数値計算手法を提案し、その計算結果を紹介する。Split Bregman methodでは、“ L^1 ”部と“ L^2 ”部を持つエネルギーを二つに分割し、それぞれに対する最小化問題で近似を与える極めて効率的な計算手法であり、その収束性も知られている[1]。この枠組みに基づく我々の手法もまた非常に効率的である。また、我々はいくつかの計算例において、厳密解が満たす数学的性質[2]を計算結果が再現していることを確認した。

4階の全変動流

$$u_t = -\Delta \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad (1)$$

は、全変動エネルギー $E(u) = \int |Du|$ の H^{-1} 勾配流とみなせる。我々はトーラス \mathbb{T} 上で4階の全変動流を考え、 u_t を後退差分により近似し、さらに制約条件 $d = Du$ を導入する。これにより、与えられた $u^k \approx u(t_k)$ に対し $u^{k+1} \approx u(t_{k+1})$ を次で求める：

$$u^{k+1} = \underset{u \in H_{\text{av}}^{-1}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \int_{\mathbb{T}} |d| + \frac{1}{2\tau} \|u - u^k\|_{H_{\text{av}}^{-1}}^2 : d = Du \right\}, \quad (2)$$

ここで τ は時間刻み幅である。ここで区分的定数関数による空間離散化を用いる。これにより、2つの区分的定数関数 $u_h^{k+1} \approx u^{k+1}$ 及び $d_h^{k+1} \approx Du^{k+1}$ を

$$(u_h^{k+1}, d_h^{k+1}) = \underset{u_h, d_h}{\operatorname{argmin}} \left\{ \int_{\mathbb{T}} |d_h| + \frac{\tau^{-1}}{2} \|u_h - u_h^k\|_{H_{\text{av}}^{-1}}^2 + \frac{\mu}{2} \|d_h - D_h u_h^k\|_{L^2}^2 \right\} \quad (3)$$

の解として求める、ここで D_h は差分を表す。この問題は、 u_h 及び d_h の各小区間上での値(係数)を成分とするベクトルについての最小化問題に帰着される。

我々はここでsplit Bregman methodに基づき、 (u_h^{k+1}, d_h^{k+1}) を反復法により決定する。すなわち $(u_h^{k,m}, d_h^{k,m})$ から $(u_h^{k,m+1}, d_h^{k,m+1})$ を決定するアルゴリズムを考え、十分大きい M について $(u_h^{k+1}, d_h^{k+1}) = (u_h^{k,M}, d_h^{k,M})$ とみなす。具体的には、ノイズ $\alpha_h^{k,m+1} = \alpha_h^{k,m} - d_h^{k,m+1} + D_h u_h^{k,m+1}$ を導入し、 $(u_h^{k,m+1}, d_h^{k,m+1})$ を決定する際に $\alpha_h^{k,m+1}$ が小さくなることを要請する。この反復により $\alpha_h^{k,M}$ が十分小さくなれば、これと $\alpha_h^{k,M-1}$ の差である $\alpha_h^{k,M-1} - \alpha_h^{k,M} = d_h^{k,M} - D_h u_h^{k,M} = d_h^{k+1} - D_h u_h^{k+1}$ も十分小さくなることが期待でき、制約条件 $d = Du$ の近似が自然と達成されるのである。

本講演では計算スキームの詳細を説明し、この手法による4階全変動流問題の数値計算例を紹介する。また、我々の手法を、結晶成長の数理モデルとして用いられるSphonのモデル[5, 4]や2次元の場合に拡張した結果も報告する。本計算手法の誤差解析は今後の課題である。

References

- [1] J.-F. Cai, S. Osher, and Z. Shen. Split Bregman methods and frame based image restoration. *Multiscale Model. Simul.*, 8(2):337–369, 2009/10.
- [2] M.-H. Giga and Y. Giga. Very singular diffusion equations: second and fourth order problems. *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, 27(3):323–345, 2010.
- [3] T. Goldstein and S. Osher. The split Bregman method for L^1 -regularized problems. *SIAM J. Imaging Sci.*, 2(2):323–343, 2009.
- [4] Y. Kashima. A subdifferential formulation of fourth order singular diffusion equations. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 14(1):49–74, 2004.
- [5] H. Spohn. Surface dynamics below the roughening transition. *J. Phys. I*, 3(1):69–81, 1993.

*Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo. E-mail: labgiga@ms.u-tokyo.ac.jp

†Faculty of Science and Engineering, Waseda University. E-mail: yuki.ueda@aoni.waseda.jp

Asymptotic behavior of viscosity solutions to the mean curvature flow equation with discontinuous source terms

北海道大学 大学院理学研究院 数学部門

浜向 直 (HAMAMUKI Nao) *

駆動力項、およびソース項(外力項)付きの平均曲率流方程式：

$$u_t(x, t) - \Delta_1 u(x, t) - \nu |\nabla u(x, t)| = c \chi_\Omega(x) \quad \text{in } \mathbf{R}^n \times (0, \infty) \quad (*)$$

の初期値問題を考える。ここで $\nu, c \in \mathbf{R}$ は定数、 $\chi_\Omega(x)$ は集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ の特性関数である。また、

$$\Delta_1 u(x, t) = \frac{|\nabla u(x, t)|}{n-1} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u(x, t)}{|\nabla u(x, t)|} \right)$$

である。(*) は、2次元核生成と呼ばれる結晶成長現象を記述する方程式である。未知関数 $u(x, t)$ は結晶表面の高さを表す。集合 Ω はステップ源と呼ばれ、この上で、結晶が速さ c で垂直方向に成長すると同時に、水平方向には、各等高面の平均曲率と駆動力 ν との和の速さで結晶が成長している、という現象を (*) は記述する。

ソース項の不連続性ゆえ、通常の粘性解の意味では、(*) の初期値問題の解の一意性が成り立たない。曲率項の $\Delta_1 u(x, t)$ が無い1階の方程式の場合は、[1, 2] で適切な粘性解の概念を導入し、その漸近挙動を調べた。本講演では、 $\nu < 0$ の場合の2階の(*)に対し、[4] で得られた、粘性解に対する弱比較定理や、解の漸近形についての結果を紹介する。これらの結果は Ω の形状に依存する。また、Kohn-Serfaty による離散ゲーム解釈の方法 [5] に基づいて解の表示を導き、それを応用して解の漸近速度を調べる。

2次元核生成による結晶成長は、ステップ源を領域境界とみなせる場合は、境界値問題としても記述できる。このときの境界条件は、解の成長速度を指定する $u_t(x, t) = c$ という動的境界条件である。この動的境界値問題の粘性解の一意存在性の結果も述べる。ディリクレ境界条件 $u(x, t) = ct + u_0(x)$ とは異なる解を与えるので、特に注意したい。こちらは [3] の内容に基づく。

参考文献

- [1] Y. Giga, N. Hamamuki, *Hamilton-Jacobi equations with discontinuous source terms*, Comm. Partial Differential Equations **38** (2013), 199–243.
- [2] N. Hamamuki, *On large time behavior of Hamilton-Jacobi equations with discontinuous source terms*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. **36** (2013), Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences, 83–112.
- [3] N. Hamamuki, *Uniqueness and existence of viscosity solutions under a degenerate dynamic boundary condition*, preprint, Hokkaido University Preprint Series in Mathematics,
<https://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/handle/2115/77215>
- [4] N. Hamamuki, K. Misu, *Asymptotic shape of solutions to the mean curvature flow equation with discontinuous source terms*, preprint.
- [5] R. V. Kohn, S. Serfaty. *A deterministic-control-based approach to motion by curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **59** (2006), 344–407.

* E-mail: hnao@math.sci.hokudai.ac.jp

優臨界楕円型方程式の球対称解の構造

宮本 安人[†] (東京大学 大学院数理科学研究科)

本講演では非線形楕円型方程式 $\Delta u + f(u) = 0$ について、非線形項 f の増大度

$$p := \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{uf'(u)}{f(u)}$$

が臨界ソボレフ指数 $p_S := (N+2)/(N-2)$ より大きい場合の解構造について考察する。 $p > p_S$ の場合は優臨界（または超臨界）と呼ばれ、エネルギーが well-defined にならず変分法による解析が難しいことが知られている。しかし、知られている幾つかの特殊な具体例から、その解構造は、臨界 $p = p_S$ や劣臨界（または亜臨界） $p < p_S$ の解構造とは異なる興味深い性質を持つことが示唆される。

常微分方程式による解析を可能にするため、球領域上の球対称解に限定する。Dirichlet 問題の非負古典解を考える場合は、Gidas-Ni-Nirenberg の理論により常に球対称解となるため、常微分方程式の議論に帰着できる。一方、Neumann 問題の場合は一般的には非球対称解が存在する。また、Dirichlet 問題であっても非負の非球対称な特異解の存在が知られている。

球対称解に限定すれば、上述のように常微分方程式に帰着する。常微分方程式の手法は非常に強力で、 $\lambda > 0$ をパラメータとする分岐問題

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda f(u) = 0 & \text{in } B(\subset \mathbb{R}^N), \\ u = 0 & \text{on } \partial B \end{cases} \quad (1)$$

に対し、ある程度一般的な f の場合であっても完全な分岐図式が得られる。

本講演では、優臨界特有の現象を紹介する。そして、上記の分岐問題(1)のこれまでの研究を概観する。Neumann 問題に対しては、 $\varepsilon^2 \Delta u - u + u^p = 0$ の球領域における球対称解の構造を考察する。最近、[GBT16] によって数値計算と数学解析により詳しい研究がなされた。そこで挙げられている予想について触れたい。

参考文献

- [GBT16] D. Bonheure, C. Grumiau and C. Troestler, *Multiple radial positive solutions of semilinear elliptic problems with Neumann boundary conditions*, Nonlinear Anal. **147** (2016), 236–273.

[†]本研究は科研費 (課題番号:19H01797, 19H05599) の助成を受けたものである。

Email: miyamoto@ms.u-tokyo.ac.jp

熱核を用いた DePhilippis-Gigli の予想の解決

本多正平 (東北大学) *

近年測度付き距離空間 (X, d, m) の研究が活発である。特にそのような空間の Ricci 曲率の研究が盛んである。より正確には、そのような空間に対して、Ricci 曲率そのものはうまく定義しにくいが、次の条件；

$$\text{Ric}_{(X,d,m)} \geq K \quad \text{かつ} \quad \dim(X, d, m) \leq N \quad (0.1)$$

は最適輸送理論の言葉でうまく定義ができる。これが成り立つと、Sobolev 埋め込み定理、Bishop-Gromov の不等式、Cheeger-Gromoll 型の分裂定理など、Riemann 幾何で知られている幾何解析的な様々な性質がこの設定でも定式化できる。[\(0.1\)](#) の正確な定義をここでは述べないが、例えばコンパクトな閉 Riemann 多様体 (M^n, g) とその上の滑らかな関数 $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて定義される測度付き距離空間 $(M^n, d_g, e^{-f} \mathcal{H}^n)$ は必ず適当な K, N で [\(0.1\)](#) を満たし、この測度付き距離空間上の Ricci 曲率の理論は Bakry-Émery の理論と深い関係があることだけ述べておく。

Cheeger-Colding による Riemann 多様体の極限空間の仕事 [\[CC97\]](#) を参考に、DePhilippis と Gigli は [\[DePhG18\]](#) で [\(0.1\)](#) を満たし、かつ $m = \mathcal{H}^N$ が成り立つとき、 (X, d, m) を非崩壊と呼んだ。この非崩壊というクラスでは上で述べた幾何解析的性質が様々な形で改良化されることがわかっている。例えば、非崩壊だと、内在的 Reifenberg の定理 [\[CC97\]](#) を用いて測度がいくらでも小さい閉集合を除いて位相多様体になることもわかる。ちなみに非崩壊であっても特異点は稠密になりうるので、この結果は驚きである。

では次に、[\(0.1\)](#) を満たす測度付き距離空間がいつ非崩壊になるのかという問い合わせを考えることは自然である。彼らは参考測度 m が N 次元 Hausdorff 測度 \mathcal{H}^N に絶対連続であれば、測度の定数倍を除いて非崩壊であろうと予想した。この予想は空間がコンパクトなときに正しいことが [\[H20\]](#) で示された。本講演ではこのことの証明の概略を話す。

証明のアイデアは熱核を使って空間を L^2 空間に埋め込み、その引き戻し計量の族を幾何学的流とみなして [\[AHPT21\]](#)、それを空間の正則化として用いることである。実はこの手法で、熱核の代わりに Dirichlet 熱核を使うことで、もともとの予想もフルで解けるが、この講演の頃には誰かがその方法で解いてくると思われる。それくらい発展が早い分野でもある。

References

- [AHPT21] L. AMBROSIO, S. HONDA, J. W. PORTEGIES, D. TEWODROSE: *Embedding of $\text{RCD}^*(K, N)$ spaces in L^2 via eigenfunctions.*, J. Funct. Anal. **280**(10) (2021), 108968.
- [CC97] J. CHEEGER, T. H. COLDING: *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I*, J. Differential Geom. **46** (1997), 406–480.
- [DePhG18] G. DE PHILIPPIS, N. GIGLI: *Non-collapsed spaces with Ricci curvature bounded below*, Journal de l’École polytechnique, **5** (2018), 613–650.
- [H20] S. HONDA, *New differential operator and non-collapsed RCD spaces*. Geom. Topol. **24** (2020), 2127–2148.

* shouhei.honda.e4@tohoku.ac.jp

高次元球面列のスペクトル収束

東京都立大学 高津 飛鳥 (asuka@tmu.ac.jp)

概 要

半径 $\sqrt{N-1}$ の N 次元球面の固有空間の中で, \mathbb{R}^n への射影に対して不変である部分空間は, 標準ガウス空間の固有空間に収束する.

曲率や次元はラプラスアンの固有値に制約を与える. そして曲率と次元を軸に考えると, 半径 a_N の N 次元球面 $\mathbb{S}^N(a_N)$ や分散 α^2 の n 次元ガウス空間がモデル空間となる. ここで, 分散 α^2 の n 次元ガウス空間とは, n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n と

$$d\gamma_\alpha^n(x) = (2\pi\alpha^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\alpha^2}\right) dx$$

で与えられる確率測度 γ_α^n の組 $\Gamma_\alpha^n = (\mathbb{R}^n, \gamma_\alpha^n)$ のことである. そして Γ_α^n のラプラス作用素 $\Delta_{\Gamma_\alpha^n}$ は

$$\Delta_{\Gamma_\alpha^n} f(x) := \Delta f(x) - \frac{1}{\alpha^2} \langle x, \nabla f(x) \rangle$$

で与えられ, 部分積分

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f_1(x), \nabla f_2(x) \rangle d\gamma_\alpha^n(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) \Delta_{\Gamma_\alpha^n} f_2(x) d\gamma_\alpha^n(x)$$

が成り立つ.

主定理

$\mathbb{S}^N(a_N)$ と Γ_α^n のラプラス作用素の固有値のリストをそれぞれ

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_0(N) < \lambda_1(N) < \cdots < \lambda_k(N) < \cdots \uparrow +\infty : \mathbb{S}^N(a_N) \text{ の固有値} \\ 0 &= \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots \uparrow +\infty : \Gamma_\alpha^n \text{ の固有値} \end{aligned}$$

と記し, $E_k(N), E_k$ をそれぞれ $\lambda_k(N), \lambda_k$ に対応する固有空間とする. そして射影 $p_N : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $p_N(x, y) = x$ と定め, $\mathbb{P}(m)$ を \mathbb{R}^m 上の多項式がなす集合とし,

$$E_k^\top(N) := \left\{ Q \in \mathbb{P}(n) \mid \exists P \in \mathbb{P}(N+1) \text{ s.t. } \begin{array}{l} Q \circ p_n^N = P \text{ on } \mathbb{S}^N(a_N) \\ P|_{\mathbb{S}^N(a_N)} \in E_k(N) \end{array} \right\}$$

とおく. このとき $\dim E_k^\top(N) = \dim E_k$ が成り立つ. さらに,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_N}{\sqrt{N-1}} = \alpha$$

ならば $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_k(N) = \lambda_k$ であり, そして $\{Q_{N,i}\}_{N \in \mathbb{N}}$ が Q_i に $L^2(\Gamma_\alpha^n)$ -強収束する $E_k^\top(N)$ の基底 $\{Q_{N,i}\}_{i=1}^{\dim E_k}$ と E_k の基底 $\{Q_i\}_{i=1}^{\dim E_k}$ が存在する.

講演では, $\mathbb{S}^N(a_N)$ および Γ_α^n における熱方程式の関係についても言及する.

参考文献

- [1] A. Takatsu, *Spectral convergence of high-dimensional spheres to the Gaussian space*, in preparation.

半線形楕円型方程式の正値解の存在について

足達慎二（静岡大学）

この講演では次の Schrödinger 型の半線形楕円型方程式を考える：

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda f(u) \text{ in } \mathbb{R}^N. \quad (1)$$

ここで、 $N \geq 3$ とし、 $\lambda > 0$ をパラメータと捉え、 λ が十分に大きい場合に正値解の存在を議論する。非線形項 $f(u)$ については原点付近でのみ優線形の条件を課し、無限遠方での増大度条件を課さずに (1) の正値解の存在を示すことが目的である。 $f(u)$ に対する仮定は以下である：

- (f1) $\exists p \in (2, 2^*)$ s.t. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t^{p-1}} = 0$.
- (f2) $\exists q \in [p, 2^*)$ s.t. $\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^q} > 0$, ここで, $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$.
- (f3) $\exists \delta_0 > 0$ s.t. $\frac{f(t)}{t}$ は $(0, \delta_0]$ で単調増加.

ポテンシャル $V(x)$ の仮定は講演中に述べる。本講演は京都産業大学の渡辺達也氏との共同研究に基づく。

参考文献

- [1] S. Adachi, T. Watanabe, *G-invariant positive solutions for a class of locally superlinear Schrödinger equations*, submitted.
- [2] S. Adachi, T. Watanabe, *G-invariant positive solutions for a quasilinear Schrödinger equation*, Adv. Diff. Eqns. **16** (2011), 289–324.
- [3] D. G. Costa, Z. Q. Wang, *Multiplicity results for a class of superlinear elliptic problems*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2004), 787–794.
- [4] J. M. do Ó, E. Medeiros, U. Severo, *On the existence of signed and sign-changing solutions for a class of superlinear Schrödinger equations*, J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), 432–445.