応用数学勉強会 2014 レクチャーノート
局所分岐解析の方法

坂元孝志

明治大学理工学部数学科

E-mail: sakamoto@meiji.ac.jp

目 次

-Lecture notes for Ouyousugaku Benkyoukai 2014-

Takashi Okuda Sakamoto (Meiji University)

1　序

本稿の目的は，非線型の微分方程式の分岐解析の方法について，解説することです．まずは，本稿を書くにあたって参考にした文献を挙げます．

本稿を通して，特に [1, 3, 5, 6, 8, 9, 18, 19, 20] を参考にしました．これらはすべて力学系，あるいは力学系における分岐についての優れたテキストです．[5] については **2nd ed.** の，[9] については **1st ed.** の訳本がそれぞれ「力学系入門（共立出版）」,「非線型の力学系とカオス（シュプリンガー）」として出版されています．非線型偏微分方程式への応用については， [6] に豊富な具体例が掲載されるとともに無限次元力学系における分岐理論の詳細な解説があります．和書では，[18] に 実際の非線型偏微分方程式のパターン形成問題への応用例が豊富に掲載されています．特に本稿の 4.1 節において Swift-Hohenberg 方程式の定常分岐を調べますが，これについては [18] においてより詳細な結果が述べられています．また，本稿の 4.2 節において述べられる結果（および他の章において述べられる関連する結果）は，小川知之教授（明治大学先端数理科学研究科）との共同研究 [16, 17] に基づくものです．

本稿において定理を述べる際にはその定理が掲載されている文献のリファレンス番号を付記しました．必要に応じて，それらの文献を参照してください．

1.1　”分岐”とは

この節ではそもそも「”分岐”とはなにか」について（数学的な厳密さは犠牲にして）可能な限り簡単に説明することを試みようと思います．あわせて，本稿でよく使用する言葉についても，出来るだけ簡単に説明してみようと思います．

はじめに，a, b, c を実数として次の x についての２次方程式を考えましょう：

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0. \tag{1.1}$$

２次方程式 (1.1) が実数の範囲に解を持つかどうかは，その判別式：

$$D = b^2 - 4ac$$

の正負によって決定し，加えて実数解の個数は $D = 0$ か $D > 0$ かによって変化します．例えば，

$$a = 1, \quad b = 0$$

のときは，$D = -4c$ なので，c の符号のみによって実数解の個数が変化します．このことを図で表すと図 1 のようになります：

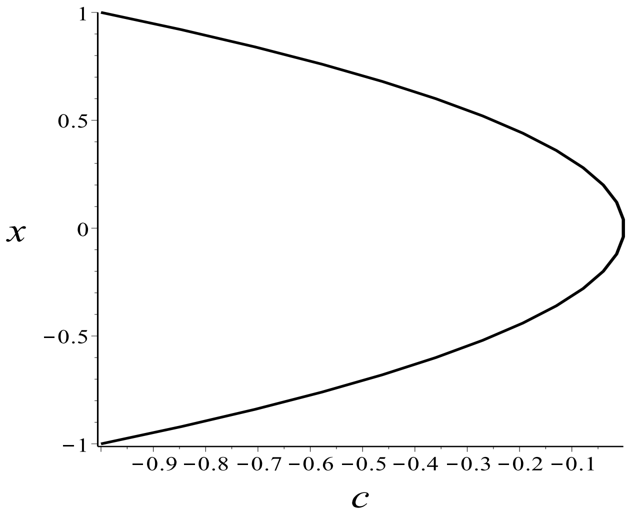


図 1: a=1,b=0 のときの (1.1) の実数解 $x = \pm\sqrt{-c}$ のグラフ表示：$\{(x, c)\,;\,-c = x^2\}$

つまり，２次方程式

$$x^2 + c = 0$$

については，$c = 0$ において解の個数が変化しています．

次に，常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + c, \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

について考えましょう．一般に常微分方程式において時間 t によらない解を**定常解** と呼びます．常微分方程式 (1.2) の定常解は t に依らずに

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

を満たすので，２次方程式

$$x^2 + c = 0$$

の実数解が 常微分方程式 (1.2) の定常解となります：

$$x(t) \equiv \pm\sqrt{-c}.$$

確認してみると (1.2) の左辺に代入すれば，$\pm\sqrt{-c}$ は t に依らない定数だから t による微分は 0 であり，右辺に代入すると

$$(\pm\sqrt{-c})^2 + c = -c + c = 0$$

となります.

このように，パラメータを含む微分方程式が与えられたとき，そのパラメータの値に応じて ”解の様子が質的に変化する ” ことを分岐と呼び，その変化が起きるパラメータの値を ” 分岐点 ” と呼びます.

もう少し話しを進めて，上で求めた 常微分方程式 (1.2) の定常解

$$\pm\sqrt{-c}$$

それぞれについて，その近くでの解の振る舞いを調べてみましょう. $c < 0$ とします. x_* を定常解とし，$y(t)$ を x_* の十分近くの解：

$$y(t) = x(t) - x_*, \quad |y(t)| \ll 1$$

として (1.2) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= (y + x_*)^2 + c \\ &= 2x_* y + y^2 + x_*^2 + c = \pm 2\sqrt{-c}\, y + y^2 \end{aligned}$$

となります（x_* は定常解だから $x_*^2 + c = 0$ かつ $dx_*/dt \equiv 0$ に注意）. $|y(t)|$ は十分小さいと考えているので，y^2 を無視すると，

$$\frac{dy}{dt} = \pm 2\sqrt{-c}\, y.$$

従って，

- $x = \sqrt{-c}$ の周りでの解の振る舞いは

$$y(t) = y(0)e^{2t\sqrt{-c}};$$

- $x = -\sqrt{-c}$ の周りでの解の振る舞いは

$$y(t) = y(0)e^{-2t\sqrt{-c}};$$

となることが期待できます（$y(0)$ はそれぞれの定常解の十分近くにとる）．このことから，$x(t) \equiv \sqrt{-c}$ の近くから出発した解は，時間が経過するとともに離れていき，$x(t) \equiv -\sqrt{-c}$ の近くから出発した解は時間が経過するとともに近づいていくことが分かります．

先に「“解の様子が質的に変化する”ことを分岐と呼ぶ」と述べましたが，“解の様子”とは個数のみならず，その周りでの解の振る舞い（近づくか離れるか）まで含めた，”様子”のことです．

ここで，本稿で使用する言葉のいくつかについて説明します．上で調べたように，定常解の周りでの解の振る舞いを大きく分けると，時間の経過とともに，近くにとどまる，定常解に近づいていく，離れていく，の３つの状態が考えられます．定常解の周りにおいて，そこから出発した解が時間が経過してもその定常解の近くにとどまるとき，その定常解を“**安定** な定常解”と呼びます．また，安定な定常解であってかつ近くから出発した解が時間の経過とともに限りなく近づくとき，その定常解を“**漸近安定** な定常解”と呼びます．また，安定でない定常解を“**不安定** な定常解”と呼びます．

ここまで常微分方程式 (1.2) について調べた事を図にすると図２のようになります．こうした図を**分岐図**（あるいは**分岐図式** ）と呼びます．

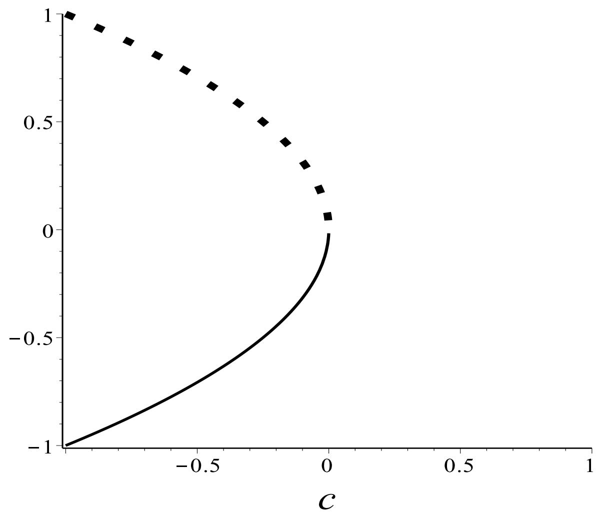


図 2: 微分方程式 (1.2) の定常解の分岐図．実線は漸近安定な定常解，点線は不安定な定常解を表す．

1.2　準備

この節では，準備として幾つかの定理と言葉の定義を述べます．前節で簡単に説明した言葉についても，きちんと定義を書くことにします．

まずは，常微分方程式系の解の存在定理を述べておきます．以下，$\dot{x}$ は dx/dt を表すものとします．

定理　([3], Theorem 1.0.1)
$U \subset \mathbb{R}^n$ を実ユークリッド空間（あるいは微分可能多様体 $\mathcal{M}$）上の部分集合で開であるものとする．$f : U \to \mathbb{R}^n$ を連続的微分可能（C^1-級）写像とし，x_0 を U 内の 1 点とする．このとき，ある正数 $T > 0$ と区間 $(-T, T) \in \mathbb{R}$ 上で定義された関数 $x(t)$ で $\dot{x} = f(x)$ および $x(0) = x_0$ を満

たす $x(t)$ がただ一つ存在する．

つまり，$\dot{x} = f(x)$ については，関数 f が 1 回微分可能で，その導関数も連続ならば，ある時刻までは解の存在が保証されます．より一般的には，f がリプシッツ関数であること：ある正数 K（x, y に依存しない）が存在して

$$|f(y) - f(x)| \leq K|x - y|, \quad x, y \in U$$

が成り立てば十分です．

次に，本稿を通してよく使用するランダウの記号について説明します：

定義（ランダウの O ）
ある正数 δ とある正数 M が存在して，

$$|x - a| < \delta$$

ならば

$$|f(x)| < M|g(x)|$$

となるとき，

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{as} \quad x \to a$$

とかく．

定義（ランダウの o）

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

であるとき，

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{as} \quad x \to a$$

とかく．

さて，一般に時励系微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

を考えましょう．

定義（流れ (Flow)）
$I \subset \mathbb{R}$ を (1.3) の解が存在する時間の区間とする．初期条件 $x(0) = x_0$ を満たす (1.3) の解を $\phi(t, x_0)$ とかく．関数

$$\phi : (t, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n \to x(t, x_0) \in \mathbb{R}^n$$

を微分方程式 (1.3) の流れという．

定義（軌道）
$I \subset \mathbb{R}$ を (1.3) の解が存在する時間の区間とし，$x_0 \in \mathbb{R}^n$ とする．$x(t, t_0, x_0)$ を $x(t_0) = x_0$ を満たす (1.3) の解とする．$t = t_0$ において，x_0 を通る (1.3) の軌道とは，集合

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,; \, x = x(t, t_0, x_0), \, t \in I\}$$

のことをいう．

定義（定常解）
(1.3) の定常解とは

$$f(x_*) = 0$$

となる $x_* \in \mathbb{R}^n$ である．定常解は，平衡解，平衡点，固定点，特異点，などとも呼ばれる．

定義（安定）
$x(t)$ を (1.3) の解とする．$x(t)$ が安定とは任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある正数 δ が存在して，(1.3) の他の解について

$$|x(t_0) - y(t_0)| < \delta$$

ならば，$t > t_0$ を満たすすべての $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう．

定義（漸近安定）
$x(t)$ が漸近安定とは，$x(t)$ が安定であって，かつ以下を満たすときをいう；ある正数 γ が存在して

$$|x(t_0) - y(t_0)| < \gamma$$

ならば

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - y(t)| = 0$$

が成り立つ．
漸近安定を単に安定といい，漸近安定ではないが安定であるときを中立安定ということもある．

定義（不安定）
安定でない解を不安定という．

定義（双曲型平衡点）
(1.3) の平衡点 x_* が双曲型であるとは，x_* における f のヤコビ行列 $Df(x_*)$ のすべての固有値の実部が 0 でないときをいう．

定義（位相同値）
２つの微分方程式から定まる力学系が位相同値であるとは，ある同相写像が存在して，任意の軌道をその向きを保ったまま，もう一方の力学系の軌道にうつすことができるときをいう．

位相同値という言葉を $t \in \mathbb{R}$ における２つの流れについて定義しました．これに対して，２つの流れがある点の近傍において位相同値であることを，２つの流れがその近傍に存在する限りにおいて位相同値であることとします．

定義（パラメータつき微分方程式が局所位相同値であること）
微分方程式

$$\dot{x} = f(x; \alpha), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m \tag{1.4}$$

が $x = x_*$ を平衡解に持ち，微分方程式

$$\dot{w} = g(w; \beta), \qquad w \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^m \tag{1.5}$$

が $w = w_*$ を平衡解に持つとする．このとき，(1.4) の定める流れが $x = x_*$ の周りにおいて，(1.5) の定める $w = w_*$ の周りでの流れと局所位相同値であるとは，x_* の近傍 U で定義され，$h_\alpha(x_*) = w_*$ を満たす同相写像

$$h_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

とある同相写像

$$p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

が存在して，U 内の任意の (1.4) の軌道をその向きを保ったまま，$V = h_\alpha(U)$ 内の $\beta = p(\alpha)$ における (1.5) の軌道にうつすことができるときをいう．

すなわち，(1.4) の軌道を $\phi(t, x(0); \alpha)$, (1.5) の軌道を $\psi(t, w(0); \beta)$ とするとき，上の条件を満たす同相写像 h_α , p とある微分同相写像 $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ですべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $\tau'(t) > 0$ を満たすものが存在して U 内の (1.4) の任意の軌道 $\phi(t, x(0); \alpha)$ に対して

$$h_\alpha\big(\phi(t, x(0); \alpha)\big) = \psi\big(\tau(t), h_\alpha(w(0)); p(\alpha)\big)$$

が成り立つことをいう．

ハートマン-グロブマンの定理

双曲型平衡点 x_* の周りの流れは，その線形化方程式系：

$$\dot{u} = Df(x_*)u$$

の定める流れと局所位相同値である．

証明は [20] の 5 章，[15] などを参照のこと．

ハートマン-グロブマンの定理によれば，平衡解の周りでの線形化行列のすべての固有値の実部が 0 でなければ，局所的には一次近似が有効です．この定理によって，前節の後半で述べた低次項近似による結果が正当化されます．

いま，２つの力学系の " 解の様子が質的に同じ " ということを，位相同値という言葉で定義しました．これによって，" 分岐 " の定義を述べることが出来ます．一般にパラメータを含む微分方程式

$$\dot{x} = f(x; \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}^p \tag{1.6}$$

を考えましょう．(1.6) の定める流れを $\phi(t, x_0; \lambda)$ とかくことにします．

定義（分岐）
x_λ を（λ に依存する）(1.6) の平衡解とする．x_λ が $\lambda = \lambda_0$ で分岐を起こすとは，λ が λ_0 の近くにあるときの λ に対する x_λ の近傍における (1.3) の流れ $\phi(t, x_0; \lambda)$, $|\lambda - \lambda_0| \ll 1$ と，$\lambda = \lambda_0$ に対する x_λ の近傍における (1.3) の流れ $\phi(t, x_0; \lambda_0)$ とが位相同値でないときをいう．

定理（分岐基準）
(1.6) の平衡点 x_λ が $\lambda = \lambda_0$ で分岐を起こすならば，平衡点 x_{λ_0} は双曲型でない．すなわち，f の x_{λ_0} におけるヤコビ行列 $Df(x_{\lambda_0})$ は実部が 0 の固有値を少なくとも一つもつ．

分岐が起こるための必要条件として線形化方程式の線形部分が，実部が 0 である固有値を少なくとも一つ持つという条件が与えられました．次節では，$\mathbb{R}$ 上の微分方程式に現れる分岐の型について，簡単に説明します．

1.3 $\mathbb{R}$ 上の連続力学系と局所分岐理論の概要

本節では，一般に微分方程式

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

を考えましょう．目標は，(1.7) について起こりうる分岐の型を分類することです．

この節を通して (1.7) に対して，次を仮定します．

- (1.7) は $\mu = 0$ において平衡解 $x(t) \equiv 0$ をもつ．すなわち，

$$f(0, 0) = 0$$

が成り立つ．

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ が成り立つ．

安定性交替分岐 (*transcritical bifurcation*)
(1.7) が $f(0,0)=0,\ f_x(0,0)=0$ を満たし，かつ

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0)=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$$

をすべて満たすとき，$(x,\mu)=(0,0)$ の近傍における (1.7) の流れは

$$\dot{x} = \mu x \pm x^2 \tag{1.8}$$

の定める流れと局所位相同値である．

証明 [9] に従って，分岐図において定常解を表す曲線（分岐曲線）の形状から f が満たすべき条件を求める．

(1.8) の分岐図を考えると $(x,\mu) = (0,0)$ で平衡解の曲線 $x = 0$ と $\mu = \pm x$ の 2 つが交わっている．このためには

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0$$

でなければならない．もしそうでなければ陰関数の定理より，$(0,0)$ を通る平衡解の曲線はただ一つしか存在しない．また，(1.8) の分岐図においては直線 $x=0$ が常に平衡解の曲線（これを平衡解 $x=0$ の枝という）を与える．

そこで，(1.7) も同じ性質を持つと仮定する．すなわち，(1.7) が

$$\dot{x} = xF(x,\mu) \tag{1.9}$$

の形であると仮定して考える，定義より，

$$F(x,\mu) \equiv \begin{cases} \dfrac{f(x,\mu)}{x}, & x \neq 0, \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,\mu) & x = 0. \end{cases}$$

陰関数

$$F(x, \mu) = 0$$

が $(x, \mu) = (0, 0)$ において $x = 0$ 以外の x 軸と交わる枝を持つための条件を調べたい．

$$F(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2}(0,0),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0),$$

が成り立つことに注意する．

陰関数の定理より，

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(0,0) \neq 0$$

ならば，$(0,0)$ の近傍において，

$$F(x, \mu(x)) = 0$$

を満たす x の関数 $\mu(x)$ がただ一つ存在する．$\mu(x)$ が $\mu = 0$ と（横断的に）交わるためには

$$0 < \left| \frac{d\mu}{dx}(0) \right| < \infty$$

でなければならない．$F(x, \mu(x)) = 0$ を x で微分すると

$$0 = \frac{d}{dx}[F(x, \mu(x))] = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \mu(x)) + \frac{\partial F}{\partial \mu}(x, \mu(x)) \frac{d\mu}{dx}(x).$$

$(x, \mu) = (0, 0)$ を代入して

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0)}{\dfrac{\partial F}{\partial \mu}(0,0)} = \frac{-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0)}.$$

したがって，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0$$

かつ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$$

でなければならない．

ここでの証明を直感的に説明すると，$f(x,\mu)$ を $(x,\mu)=(0,0)$ の周りでテイラー展開したときに，(1.8) にある項のみが残る条件，あるいは適当な座標変換で (1.8) に変換できる項だけが残る条件を考えていることになります．以下，同じように考えていきます．

鞍状点-結節点分岐 (*saddle-node bifurcation*)
(1.7) が $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=0$ を満たし，かつ

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$$

をすべて満たすとき，$(x,\mu)=(0,0)$ の近傍における (1.7) の流れは

$$\dot{x} = \mu \pm x^2 \tag{1.10}$$

の定める流れと局所位相同値である．鞍状点結節点分岐は，フォールド分岐 (*fold bifurcation*) とも呼ばれる．

証明
ここでもやはり [9] に従って，分岐曲線の形状から f が満たすべき条件を求める．サドルノード分岐（フォールド分岐）の証明は [8] の 3.3 節にもある（本稿の付録参照）．

(1.10) の分岐図について考えると, 平衡解の曲線は，$\mu>0$ か $\mu<0$ のいずれか片方に（ただ一つだけ）あって，$(x,\mu)=(0,0)$ において x 軸と接する．これが (1.7) において満たされるための条件を考える．

陰関数の定理より，

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} \neq 0$$

ならば，$(0,0)$ の近傍において

$$\mu = \mu(x), \quad \mu(0) = 0$$

かつ

$$f(x, \mu(x)) = 0$$

を満たす曲線がただ一つ存在する．さらに

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}(0) = 0 \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}(0) \neq 0 \tag{1.12}$$

が満たされていれば局所的には条件に合う分岐図が得られる．

そこで，

$$f(x, \mu(x)) = 0$$

を陰関数に微分して，条件 (1.11), (1.12) から f の導関数に関する条件を導く．x について微分して

$$0 = \frac{d}{dx}[f(x, \mu(x))] = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu(x)) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, \mu(x))\frac{d\mu}{dx}(x).$$

$(x, \mu) = (0,0)$ とすると

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\dfrac{\partial f}{\partial \mu}(0,0)}.$$

したがって，

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0$$

かつ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

ならば

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = 0$$

より，平衡解の曲線 $\mu(x)$ は x 軸 に $(0,0)$ で接する．

さらに，$f(x,\mu(x)) = 0$ を x で2回微分すると

$$\begin{aligned}0 \;=\; & \frac{\partial^2}{\partial x^2}[f(x,\mu(x))] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\mu(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(x,\mu(x))\frac{d\mu}{dx}(x) \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}(x,\mu(x))\left(\frac{d\mu}{dx}(x)\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x,\mu(x))\frac{d^2\mu}{dx^2}(x).\end{aligned}$$

$(x,\mu) = (0,0)$ を代入して $(d\mu/dx)|_{x=0} = 0$ に注意すると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0)\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) = 0.$$

よって

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) = \frac{-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\dfrac{\partial f}{\partial \mu}(0,0)}$$

だから，

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) \neq 0$$

かつ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$$

ならば

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) \neq 0$$

が成り立つ．

熊手型分岐 (*pitchfork bifurcation*)

(1.7) が $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = 0$ を満たし，かつ

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$$

をすべて満たすとき，$(x,\mu) = (0,0)$ の近傍における (1.7) の流れは

$$\dot{x} = \mu x + \varsigma x^3, \quad \varsigma = \pm 1 \tag{1.13}$$

の定める流れと局所位相同値である．$\varsigma = 1$ のときを亜臨界熊手型分岐 (*subcritical pitchfork bifurcation*), また，$\varsigma = -1$ のときを超臨界熊手型分岐 (*supercritical pitchfork bifurcation*), という．

証明 上の２つの分岐の型の証明方法をあわせて，(1.7) の分岐図の形状が (1.13) のそれの特徴をもつための f の条件を求める．

やはり $x = 0$ は常に（分岐図における）平衡解の直線を与えると仮定して，すなわち，

$$f(x,\mu) = xF(x,\mu)$$

の形を仮定して考える．F は

$$F(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \mu} \neq 0$$

を満たし，さらに $F(x,\mu) = 0$ の陰関数の枝 $\mu(x)$ は

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d^2\mu}{dx^2}(0) \neq 0$$

を満たしている必要がある．これらの条件を 前の証明と同様に（$F(x,\mu(x)) = 0$ の両辺を微分することにより）f が満たすべき条件に書き換えればよい．

この節でみたように，f の条件を調べることによって各分岐の型を決めることが出来ます．一方で，係数の符号 $\pm$ のいずれが現れるかを与えられた問題ごとに決定することは，分岐の型の決定とは別の問題です．このことは，後の章で２重 0 固有値が現れる場合を扱う際にも注意が必要です．

次章以降では，分岐解析の方法について説明します．

2　分岐解析の方法：中心多様体定理

この章では，分岐解析において強力な方法である中心多様体理論について説明します．

微分方程式系：

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x^5 \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases} \tag{2.1}$$

を考えましょう．目標は (2.1) の平衡解 $(0,0)$ の安定性を調べることです．大まかにいって，分岐解析によって分かることは，定常解の存在とその安定性です（もっとうまくいくと，時間周期的な解の存在や，より複雑な解を調べることもできますが，それは後の章で考えることにします）．一般に非線型の微分方程式や，(まだ登場していませんが) 非線型の偏微分方程式に対しては，一般的な解の公式などが無いため，定常解の存在とその周りでの解の振る舞いが理解できるだけでも私は十分におもしろいと思います．

さて，$(0,0)$ の周りで考えればよいのだから，1.1 節で行なったように (2.1) のそれぞれの微分方程式の右辺において（$x(t), y(t)$ について）最も低次の項だけ取り出してみましょう；

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -y \end{cases}.$$

すると y については，

$$y(t) = y(0)e^{-t}$$

と解けてしまいます．

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} y(0)e^{-t} = 0$$

だから (2.1) で $y = 0$ とすると

$$\dot{x} = -x^5$$

となります．従って，

$$\dot{x} \begin{cases} < 0 & x > 0 \\ > 0 & x < 0 \end{cases}$$

となります．また，微分方程式の解の一意性から

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\,(x,y) \equiv (0,0)\}$$

とそれ以外の軌道は交差しないので，x 軸上を出発した解はすべて $(0,0)$ に時間無限大で限りなく近づくことになります．よって，$(0,0)$ は漸近安定です．

しかし，この結果は間違っています．原点近傍において (2.1) の定める流れを正しく調べるためには，ここで述べたような単純な近似（接平面近似）ではなく，中心多様体定理を用いた解析が必要です．

2.1 中心多様体定理

いよいよ本稿を通して核となる中心多様体定理について説明します．

次の時励系微分方程式系を考えましょう：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x,y), \\ \dot{y} = Bx + g(x,y), \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{2.2}$$

ここで，$n \times n$ 行列 A, $m \times m$ 行列 B, 関数 f, g は以下の条件を満たすとします；

- A のすべての固有値の実部は 0 であり，B のすべての固有値の実部は負である．
- f, g は C^r-関数（$r \geq 2$）であって，
$$f(0,0)=0, \quad D_xf(0,0)=0, \quad D_yf(0,0)=0,$$
$$g(0,0)=0, \quad D_xg(0,0)=0, \quad D_yg(0,0)=0$$
を満たす．

まず，“局所不変”という言葉の定義を述べます；

定義（局所不変）

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 内の多様体 $\mathcal{M}$ が，(2.2) の流れに対して局所不変であるとは，ある $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ の近傍 $\mathcal{U}$ が存在して，(x,y) が $(x(0),y(0)) \in \mathcal{M} \cap \mathcal{U}$

かつすべての $t \in [0,T]$ について $u(t) \in \mathcal{U}$ を満たす (2.2) の解ならば，すべての $t \in [0,T]$ に対して $(x(t), y(t)) \in \mathcal{M}$ が成り立つことをいう．

次に，中心多様体についての定義を述べます；

定義 （中心多様体）
(2.2) の流れに対して不変な多様体 $\mathcal{W}^c$ は，十分小さい正数 δ に対して，$|x| < \delta$ で定義され，

$$h(0) = 0,\ Dh(0) = 0$$

を満たすある関数 $h(x)$ が存在して

$$\mathcal{W}^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\,;\, y = h(x)\}$$

と表されるとき，(2.2) の中心多様体と呼ばれる．

さて，中心多様体定理を述べます．これら３つの定理は [1] からの引用です．証明も [1] を参照してください．

定理（中心多様体の存在）（[1], Theorem 1）
(2.2) の中心多様体は存在して， (2.2) の力学系を中心多様体に制限したものは，

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)), \quad |u| < \delta, \quad u \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

で与えられる．

証明は，[1] を参照のこと．

定理（縮約原理）（[1], Theorem 2）
(2.2) の定常解（自明解）$(x,y) \equiv (0,0)$ が安定（漸近安定）（不安定）であるとする．このとき，(2.3) の自明解 $u \equiv 0$ も安定（漸近安定）（不安定）である．さらに， (2.2) の自明解が安定であるとする．このとき，$(x(t), y(t))$

が十分小さな初期値 $(x(0), y(0))$, $|x(0)|, |y(0)| \ll 1$ をもつ (2.2) の解であるとすると，(2.3) の解 $u(t)$ で $t \to \infty$ のとき，

$$
\begin{aligned}
x(t) &= u(t) + O(e^{-\gamma t}), \\
y(t) &= h(u(t)) + O(e^{-\gamma t}), \quad (\gamma > 0)
\end{aligned}
$$

を満たすものが存在する．

証明は，[1] を参照のこと．

次に，$h(x)$ を求める方法を考えましょう．上の定理によれば，

$$y = h(x)$$

と表されるので，両辺を t で微分すると

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= Dh(x)\dot{x} \\
&= Dh(x)\{\, Ax + f(x, h(x))\,\}
\end{aligned}
$$

を得ます．一方，

$$\dot{y} = By + g(x, y) = Bh(x) + g(x, h(x))$$

だから

$$Bh(x) + g(x, h(x)) = Dh(x)\{\, Ax + f(x, h(x))\,\} \tag{2.4}$$

が成り立ちます．これが，$h(x)$ が中心多様体であるために満たすべき偏微分方程式です．

定理（中心多様体の近似）[1], Theorem 3）
C^1-関数 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は $\varphi(0) = D\varphi(0) = 0$ をみたし，ある正数 q が存在して

$$D\varphi(x)\{\, Ax + f(x, \varphi(x))\,\} - B\varphi(x) + g(x, \varphi(x)) = O(|x|^q) \quad \text{as} \quad x \to 0$$

であるとする．このとき，

$$|h(x) - \varphi(x)| = O(|x|^q)$$

が成り立つ．

証明は，[1] を参照のこと．

この定理によって，もしなんらかの方法によって (2.4) の近似解を $O(|x|^p)$ までの多項式として求めることができれば，その近似解自身が，中心多様体の $O(|x|^p)$ までの近似になっているということが保証されます．

次節では実際に中心多様体定理を応用して (2.1) の自明解の安定性を調べます．

2.2 中心多様体定理の応用

中心多様体定理を (2.1) ：

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x^5 \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

に適応してみましょう．(2.1) は明らかに中心多様体定理が成り立つための仮定を満たしています．

$h(x)$ を (2.1) の中心多様体とすると， (2.4) より

$$A = 0, \quad B = -1, \quad f(x,y) = xy - x^5, \quad g(x,y) = x^2$$

だから

$$-h(x) + x^2 = \frac{dh}{dx}(x)\{\, xh(x) - x^5 \,\} \tag{2.5}$$

を得ます．ここで，$h(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ を代入して未知係数 $a_2, a_3, \ldots$ を求めることも出来ますが，すこし楽をしましょう．いま．

$$h(0) = h'(0) = 0$$

が分かっているので $h(x)$ の最も低次の項は $O(x^2)$ となっているはずです．そこで，(2.5) について２次の項だけを残して各項のオーダーを比較してみると

$$h'(x) = O(x), \quad xh(x) = O(x^3), \quad -x^5 = O(x^5)$$

ですから

$$-h(x) + x^2 = O(x)\{O(x^3) + O(x^5)\}\}$$

となり，

$$h(x) = x^2 + O(x^4)$$

と求めることが出来ます．これを (2.1) に代入して

$$\dot{x} = x^3 + O(x^5)$$

を得ます．従って自明解 $x \equiv 0$ は不安定です．これは，単に低次項のみを拾って $y = 0$ として計算した結果とは異なっています． ここまでが常微分方程式についての中心多様体定理の簡単な解説と応用です．この結果は，同時にハートマン－グロブマンの定理の重要性を際立たせるものでもあります．

次章以降では，偏微分方程式の分岐解析の方法について説明したいと思います．

3　偏微分方程式の分岐解析

3.1　無限次元における中心多様体定理

前章においては有限次元のユークリッド空間における中心多様体定理とその応用について説明しました．本章では，無限次元における中心多様体定理とその応用による分岐解析について説明します．次章以降の技術的な面だけをいえば，この章は読み飛ばしても差し支えありません．

まずは，中心多様体定理を無限次元へ拡張する必要がありますが，無限次元への拡張については，Haragus と Iooss による優れたテキスト [6] があります．この節において述べる諸定理は，[6] からの引用です．

また，本稿の付録に不安定方向まで込めた不変多様体：中心不安定多様体定理の概要がありますので，そちらも参照してください．

X, Y をバナッハ空間とします．まずはじめに，この節において用いる記号を定義します；

- X から Y への有界線形作用素の空間を $\mathcal{L}(X, Y)$ で定義する．これは，作用素ノルム
$$\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\|u\|_X = 1} \|Lu\|_Y$$
のもとでバナッハ空間となる．$X = Y$ のとき，$\mathcal{L}(X, X)$ を単に $\mathcal{L}(X)$ とかく．

- X から Y への k 回連続的フレッシェ微分可能な関数の空間を $\mathcal{C}^k(X, Y)$ とかく．$F : X \to Y$, $F \in \mathcal{C}^k(X, Y)$ に対して，そのノルムを
$$\|F\|_{\mathcal{C}^k} = \max_{j=0,\ldots k} \left(\sup_{x \in X} \|D^j F(x)\|_{\mathcal{L}(X^j, Y)} \right)$$
で定義する．$\mathcal{C}^k(X, Y)$ はこのノルムのもとでバナッハ空間である．

- 正定数 η に対して，関数空間 $\mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, X)$ を
$$\mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, X) := \left\{ u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, X)\,;\, \|u\|_{\mathcal{C}_\eta} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(e^{-\eta|t|} \|u(t)\|_X \right) < \infty \right\}$$
で定義する．$\mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, X)$ は $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_\eta}$ のもとでバナッハ空間である．同様に，バナッハ空間 $\mathcal{F}_\eta$ を
$$\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R}, X) := \left\{ u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, X)\,;\, \|u\|_{\mathcal{F}_\eta} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(e^{\eta t} \|u(t)\|_X \right) < \infty \right\}$$
で定義する．

- 線形作用素 $L : X \to Y$ の像集合を $\operatorname{im} L$ とかく；

$$\operatorname{im} L := \{Lu \in Y\,;\, u \in X\} \subset Y.$$

また，L の核を $\ker L$ とかく；

$$\ker L := \{u \in X\,;\, Lu = 0\} \subset X.$$

- X から Y への連続な埋め込みが存在するとする．線形作用素 $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ のレゾルベント集合を $\rho(L)$（または単に ρ）とかく;

$$\rho := \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \lambda\mathbb{I} - L : X \to Y \text{ is bijective}\}.$$

ここで $\mathbb{I}$ は恒等写像を表す．また，L のスペクトル集合を $\sigma(L)$（または単に σ）とかく；

$$\sigma := \mathbb{C} \setminus \rho\,.$$

仮定

X, Y, Z をバナッハ空間とし，X から Y への，Y から Z への自然な埋め込みが連続であるとします．Z における微分方程式

$$\frac{du}{dt} = Lu + N(u) \tag{3.1}$$

を考えましょう．

仮定 1　線形作用素 L と非線型部分 N は以下を満たす；

- $L \in \mathcal{L}(X, Z)$；

- 定数 $k \geq 2$ に対して，$0 \in X$ の近傍 V が存在して

$$N \in \mathcal{C}^k(V, Y)$$

であって，

$$N(0) = 0, \quad DN(0) = 0$$

を満たす（D はフレッシェ微分）．

$N(0)=0$ より，$u(t)\equiv 0$ が (3.1) の平衡解であることを注意しておきます．さて， L のスペクトル集合 σ を

$$\sigma = \sigma_+ \cup \sigma_0 \cup \sigma_-$$

と分けます．ここで,

$$\begin{aligned}
\sigma_+ &= \{\lambda \in \sigma; \mathrm{Re}\,\lambda > 0\},\\
\sigma_0 &= \{\lambda \in \sigma; \mathrm{Re}\,\lambda = 0\},\\
\sigma_- &= \{\lambda \in \sigma; \mathrm{Re}\,\lambda < 0\},
\end{aligned}$$

です（$\mathrm{Re}\,\lambda$ は λ の実部を表す）.

仮定 2

- ある正数 γ が存在して

  $$\sup_{\lambda\in\sigma_-} \mathrm{Re}\,\lambda < -\gamma, \quad \gamma < \inf_{\lambda\in\sigma_+} \mathrm{Re}\,\lambda$$

  が成り立つ.
- 集合 σ_0 は重複度も込めて有限個の固有値からなる.

これらの仮定のもとで，方程式 (3.1) をその線形化作用素 L の固有値の実部が 0 となる部分と，それ以外に分解します．そのためには，σ_0 に対応する固有関数の張る固有空間への射影作用素を定義する必要があります．Γ を $\{\lambda\,;\,|\mathrm{Re}\,\lambda| < \gamma\}$ 上の反時計回りの方向を正の向きとする閉曲線であって σ_0 を囲むものとします．このとき，Dunford 積分 ([7], Section III. 4, [21]（上）, 1.3 節)

$$\mathbf{P}_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda\mathbb{I} - L)^{-1} d\lambda \in \mathcal{L}(Z, X)$$

によって射影作用素が定まります．$\mathbf{P}_0$ は

$$\mathbf{P}_0^2 = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{P}_0 L u = L\mathbf{P}_0 u \quad \text{for all } u \in X$$

を満たします．さらに，$\dim(\operatorname{im}\mathbf{P}_0)$ は有限です．射影作用素 $\mathbf{P}_h$ を

$$\mathbf{P}_h = \mathbb{I} - \mathbf{P}_0$$

で定義します．この $\mathbf{P}_h$ もやはり

$$\mathbf{P}_h^2 = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{P}_h L u = L\mathbf{P}_h u \quad \text{for all } u \in X$$

をみたし，$\mathbf{P}_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ であり，さらに X から Y への，Y から Z への連続な埋め込みが存在するので，

$$\mathbf{P}_h \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(Y) \cap \mathcal{L}(Z)$$

が成り立ちます．

次に，

$$\mathcal{E}_0 = \operatorname{im}\mathbf{P}_0 = \ker\mathbf{P}_h \subset X, \quad Z_h = \operatorname{im}\mathbf{P}_h = \ker\mathbf{P}_0 \subset Z$$

とすると，Z は

$$Z = \mathcal{E}_0 \oplus X_h$$

と直和に分解されます．

$$X_h = \mathbf{P}_h X \subset X, \quad Y_h = \mathbf{P}_h Y \subset Y$$

とし，L_0, L_h を それぞれ L の $\mathcal{E}_0, X_h$ への制限とします．

$$L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_0), \quad L_h \in \mathcal{L}(Z_h, X_h)$$

が成り立ちます．このとき，L_0 のスペクトル集合は σ_0 であり，L_h のスペクトル集合は $\sigma_h = \sigma_+ \cup \sigma_-$ となります．
さて，無限次元空間において (3.1) の中心多様体が存在するためには，上の仮定に加えて線形作用素 L についての仮定が必要です．

仮定 3　すべての $\eta \in [0,\gamma]$ とすべての $f \in \mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, Y_h)$ に対して，u_h についての線形方程式

$$\frac{du_h}{dt} = L_h u_h + f(t)$$

は一意解 $u_h = \mathbf{K}_h f \in \mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, Z_h)$ をもつ．さらに，線形写像 $\mathbf{K}_h$ は $\mathcal{L}(\mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, Y_h), \mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, Z_h))$ の元であって，ある連続写像 $C : [0,\gamma] \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\|\mathbf{K}_h\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\eta(\mathbb{R},Y_h),\mathcal{C}_\eta(\mathbb{R},Z_h))} \leq C(\eta)\,.$$

定理 2.1（無限次元空間における中心多様体定理）([6], Theorem 2.9)
仮定 1, 仮定 2, 仮定 3 が満たされているとする．このとき以下を満たす写像 $\Psi \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E}_0, X_h)$ が存在する；

- $\Psi(0) = 0, \quad D\Psi(0) = 0\,,$
- 以下を満たす $0 \in X$ の近傍 $\mathcal{U}$ が存在する；多様体

$$\mathcal{M}_0 = \{u_0 + \Psi(u_0)\,;\, u_0 \in \mathcal{E}_0\} \subset X$$

が以下の条件を満たす；

(i) $\mathcal{M}_0$ は局所不変である．すなわち，次が成り立つ：
u が $u(0) \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{U}$ かつすべての $t \in [0,T]$ について $u(t) \in \mathcal{U}$ を満たす (3.1) の解ならば，すべての $t \in [0,T]$ に対して $u(t) \in \mathcal{M}_0$.

(ii) $\mathcal{M}_0$ は，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{U}$ にとどまる有界な (3.1) の解をその内部に含む．すなわち以下が成り立つ：
u がすべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $u(t) \in \mathcal{U}$ を満たす (3.1) の解ならば，$u(0) \in \mathcal{M}_0$.

証明は [6] を参照.

系 ([6], Collorary 2.12)

(3.1) の解 $u(t)$ で $t \in I$（$I \subset \mathbb{R}$ は開区間）において $u(t) \in \mathcal{M}_0$ となるものを考える．このとき，

$$u = u_0 + \Psi(u_0)$$

であって，u_0 は次を満たす；

$$\frac{du_0}{dt} = L_0 u_0 + P_0 N(u_0 + \Psi(u_0)).$$

さらに，Ψ は以下を満たす；

$$\begin{aligned} & D\Psi(u_0)\{\, L_0 u_0 + P_0 N(u_0 + \Psi(u_0)) \,\} \\ & \quad = L_h \Psi(u_0) + P_h N(u_0 + \Psi(u_0)), \quad \text{for all } u_0 \in \mathcal{E}_0. \end{aligned}$$

証明はやはり [6] にありますが，概略としては，$u = u_0 + \Psi(u_0)$ を (3.1) に代入し，P_0, P_h による射影をとることで証明できます．

実際に偏微分方程式への応用においては **仮定 3** の確認が大変です．しかし，もし

$$Y \subset Z \quad \text{with} \quad Y \neq Z$$

であれば，**仮定 3** を次の**仮定 3.1** に取り替えることが出来ます；

仮定 3.1　ある正数 ω_0, c とある実数 $\alpha \in [0, 1)$ が存在して，すべての $\omega \in \mathbb{R}$, $|\omega| \geq \omega_0$ に対して，$i\omega$ は L のレゾルベント集合 $\rho(L)$ に含まれ，かつ以下の評価が成り立つ．

$$\|(i\omega\mathbb{I} - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq \frac{c}{\omega}, \tag{3.2}$$

$$\|(i\omega\mathbb{I} - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq \frac{c}{\omega^{1-\alpha}}. \tag{3.3}$$

さらに，放物型方程式の場合には $-L$ が角域作用素と呼ばれるものであれば，L が解析半群の生成素となり，**仮定 3.1** の条件がすべて満たされます．角域作用素と半群については [4, 21] および [2] を，線形作用素が半群の生成素である場合の中心多様体定理については [1] の 6 章 を参照してください．

定義 （角域作用素）
線形作用素 $A \in \mathcal{L}(X, Z)$ が角域作用素であるとは，A が閉作用素であり，その定義域 $D(A)$ が X において稠密であって，かつ以下を満たすときをいう；ある $\phi \in (0, \pi/2)$ とある定数 $M \geq 1$ ，ある実数 a が存在して，

$$S_{a,\phi} = \{\lambda;\, \phi < |\arg(\lambda - a)| < \pi, \lambda \neq a\} \tag{3.4}$$

が A のレゾルベント集合 $\rho(A)$ に含まれ，かつ

$$\|(\lambda \mathbb{I} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \text{for all } \lambda \in S_{a,\phi}$$

が成り立つ．

定義 (解析半群)
バナッハ空間 Z における連続な線形作用素 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ が解析半群であるとは，$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ が以下を満たすときをいう：

(i) $T(0) = \mathbb{I}$ (恒等写像) であって，すべての $s, t > 0$ に対して $T(t)T(s) = T(t+s)$ が成り立つ；

(ii) $u \in Z$ に対して，$t \to +0$ のとき， $T(t)u \to u$;

(iii) $u \in Z$ に対して，写像 $t \to T(t)u$ はすべての $0 < t < \infty$ につい実解析的である．

定義（解析半群の生成素）
解析半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ に対して

$$\lim_{t\to+0} \frac{1}{t} \left(T(t)u - u\right) = Lu, \quad u \in Z$$

によって定まる線形作用素 L を解析半群 $T(t)$ の生成素という．

定理 ([4], Theorem 1.3.4)
線形作用素 A が角域作用素ならば，線形作用素 $-A$ は解析半群 $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$:

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (\lambda\mathbb{I} + A)^{-1} e^{\lambda t}\, d\lambda$$

の生成素である． ここで，Γ は $|\lambda| \to \infty$ のとき，$\mathrm{arg}\lambda \to \theta$ であるような $-A$ のレゾルベント集合 $\rho(-A)$ 内の積分路である．また， 線形作用素 $-A$ が解析半群の生成素ならば，線形作用素 A は角域作用素である．

証明は [4] を参照．

最後に，X, Y, Z がヒルベルト空間の場合の結果を述べます．この場合には，$Z = Y$ であっても **定理 2.1** が成り立ちます：

ヒルベルト空間における中心多様体定理（[6], Theorem 2.20）
X, Y, Z がヒルベルト空間であって， **仮定 1, 仮定 2,** が満たされており，かつ線形作用素 L_h がそのレゾルベントに関する不等式 (3.2) を満たすならば，定理 2.1 が成り立つ．

証明は [6] を参照．

もし不安定方向のスペクトル集合が空集合の場合には，有限次元の場合と同じく，縮約原理が成立します：

無限次元空間における縮約原理 ([6], Theorem 3.22)
$\sigma_+ = \emptyset$ ならば，(3.1) の中心多様体 $\mathcal{M}_0$ は局所吸引的である．すなわち，以下が成り立つ：

$u(t) \in \mathcal{U}$, $t > 0$ が (3.1) の解ならば，$u(t)$ は $\mathcal{M}_0$ 上の (3.1) の解に指数的に漸近する．より正確には $u(t; u(0))$ が $u(0) \in \mathcal{U}$ かつ $u(t; u(0)) \in \mathcal{U}, \forall t > 0$ を満たす (3.1) の解ならば，ある $\tilde{u} \in \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{U}$ と正数 γ' が存在して次が成り立つ：

$$u(t; u(0)) = u(t; \tilde{u}) + O(e^{-\gamma' t}) \quad \text{as} \quad t \to \infty.$$

証明は [6] を参照.

以上が，無限次元における中心多様体定理です．次節では具体的な問題について，中心多様体定理が適応できるかどうかを調べてみましょう．

3.2 具体例

3.2.1 反応拡散方程式

具体的に，次の反応拡散方程式を考えましょう：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + g(u)\,, \\ &u(0,t) = u(\pi, t)\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここで，$u(x,t)$ は実数値関数で，$(x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}$ であり，g は $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $k \geq 2$ であって，

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0$$

を満たすとします．関数空間として

$$X = \{u \in H^2(0,\pi)\,;\, u(0) = u(\pi) = 0\}\,,$$
$$Y = Z = \{u \in L^2(0,\pi)\,;\, u(0) = u(\pi) = 0\}$$

を設定します．$X, Y(=Z)$ はヒルベルト空間です．

(3.5) の $u(t,x) \equiv 0$ の周りでの線形化方程式は

$$Lu := u'' + u$$

です．固有値と固有関数は

$$\lambda_j = 1 - j^2, \quad \sin jx, \quad j \in \mathbb{N}$$

で与えられます．$j = 1$ のとき，$\lambda_0 = 0$, $\lambda_j < 0$, $j > 1$ が成り立ちます．すなわち，

$$\sigma_0 = \{0\}, \quad \sigma_- = \{\lambda_j\,;\, j > 1,\, j \in \mathbb{N}\}, \quad \sigma_+ = \emptyset$$

です．$\lambda_0 = 0$ に対応する固有関数は $\sin x$ であり，0 固有値に対応する固有空間への射影作用素 $\mathbf{P}_0$ は，$u \in Z$ に対して，$\sin x$ を乗じて $[0,\pi]$ 上積分する（通常の L^2 での内積をとる）という操作によって得られます；

$$\mathbf{P}_0\, u = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi u\, \sin x\, dx\right)\sin x$$

さて，確認すべきはレゾルベントに関する不等式 (3.2) です．$v \in Z$ と $w \in (\mathbb{I} - \mathbf{P}_0)X$ に対して，

$$(i\omega - L)w = v$$

を考えます ($w = (i\omega - L)^{-1}v$ です)．すなわち，

$$(i\omega - 1)w - w'' = v\,.$$

両辺に，$\overline{w}$ を掛けて $(0,\pi)$ 上で積分すると

$$(i\omega - 1)\int_0^\pi |w|^2\, dx - \int_0^\pi w''\overline{w}\, dx = \int_0^\pi v\overline{w}\, dx$$

を得ます．部分積分により，

$$\int_0^\pi w''\overline{w}\,dx = [w'\overline{w}]_0^\pi - \int_0^\pi w'\overline{w}'\,dx = \|w'\|_{L^2}^2$$

ですから，

$$(i\omega - 1)\|w\|_{L^2}^2 + \|w'\|_{L^2}^2 = \int_0^\pi v\overline{w}\,dx\,.$$

両辺の虚部をとると

$$\omega\|w\|_{L^2}^2 = \mathrm{Im}\int_0^\pi v\overline{w}\,dx\,.$$

シュワルツの不等式より，

$$|\omega|\|w\|_{L^2}^2 \le \|v\|_{L^2}\|w\|_{L^2}.$$

整理して

$$\|w\|_{L^2} \le \frac{1}{|\omega|}\|v\|_{L^2}$$

従って，

$$\|w\|_{L^2} = \|(i\omega\mathbb{I} - L)^{-1}v\|_{L^2} \le \frac{1}{|\omega|}\|v\|_{L^2}$$

より，

$$\|(i\omega\mathbb{I} - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z)} = \sup_{\|v\|_{L^2}=1}\|(i\omega - L)^{-1}v\|_{L^2} \le \frac{1}{\omega}\,.$$

この結果から，(3.5) について，その中心多様体の存在が分かります．

上のレゾルベント評価の代わりに，L が解析半群の生成素であること，すなわち，$-L$ が角域作用素であることを示すことによっても中心多様体定理が成り立つことが分かります．実際，[21] の第 2 章においてあるクラスの楕円型微分作用素が角域作用素であることが示されています．

反応拡散方程式系について非線形項まで含めた解析については次章以降で説明します．

3.2.2 Swift-Hohenberg 方程式

この節では次の方程式について，中心多様体定理が適応できることを確認します；

Swift-Hohenberg 方程式

$$\text{(SHE)} \qquad u_t = -u_{xxxx} - 2u_{xx} - (1-\nu)u - u^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

を周期 ℓ の周期関数の空間（相空間）

$$X = H^4_{per} := \{u \in H^4_{loc}(\mathbb{R})\,;\, u(x) = u(x+\ell)\},$$
$$Y = Z = L^2_{per} := \{u \in L^2_{loc}(\mathbb{R})\,;\, u(x) = u(x+\ell)\}$$

において考えます．未知関数 $u(t,x)$ は実数値関数であることを注意しておきます．周期関数の空間を考えているので，未知関数をフーリエ級数展開によって表現します：

$$u = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m(t)e^{imk_0x}, \quad k_0 = 2\pi/\ell.$$

ここで，$u(t,x) \in \mathbb{R}$ だから $u_m(t) = -\overline{u}_m(t)$ です．いま，考えたいのは自明解 $u(t,x) \equiv 0$ のまわりでの力学系的性質です．そこで，自明解の周りでの線形化方程式を考えると

$$u_t = L\,u, \quad Lu = -u^{(4)} - 2u'' - (1-\nu)u$$

となります．固有値と固有関数は（フーリエ級数展開を線形化方程式に代入して）

$$\lambda_j = \nu - (1-j^2k_0^2)^2, \qquad e^{\pm ijk_0x}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

で与えられます．(ν, k_0) 平面において曲線

$$C_j := \{(\nu, k_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\,;\, \nu = (1-j^2k_0^2)^2\}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

を考えると，$(\nu, k_0) \in C_j$ なら $\lambda_{\pm j} = 0$ であり，さらに与えられた $j \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(\nu, k_0) = (0, \frac{1}{|j|})$$

のとき，

$$\lambda_{\pm j} = 0, \quad \lambda_m < 0,\, m \in \mathbb{Z} \setminus \{-j, j\}$$

が成り立ちます．

さて，線形作用素 L のレゾルベントに対する評価は前節と同様に以下のように計算できます．$w \in H^4_{per}$ に対して

$$(i\omega \mathbb{I} - \mathcal{L})w = v$$

を考えると

$$(i\omega \mathbb{I} - \mathcal{L})w = w^{(4)} + 2w'' + (i\omega + 1 - \nu)w$$

ですから，$\overline{w}$ を掛けて $(0, \ell)$ 上積分すると

$$\|w''\|^2_{L^2_{per}} + 2\|w'\|^2_{L^2_{per}} + (i\omega + 1 - \nu)\|w\|^2_{L^2_{per}}$$

を得ます．したがって，

$$\|w''\|^2_{L^2_{per}} + 2\|w'\|^2_{L^2_{per}} + (i\omega + 1 - \nu)\|w\|^2_{L^2_{per}} = \int_0^\ell \overline{w} v \, dx.$$

虚部をとれば

$$\omega \|w\|^2_{L^2_{per}} = \mathrm{Im}\left(\int_0^\pi \overline{w} v \, dx\right) \le \|w\|_{L^2_{per}} \|v\|_{L^2_{per}}$$

ですから，

$$\|(i\omega \mathbb{I} - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z)} = \sup_{\|v\|_{L^2_{per}} = 1} \|(i\omega - L)^{-1} v\|_{L^2_{per}} \le \frac{1}{\omega}\,.$$

したがって，$(\nu, k_0) = (0, 1/|j|)$ のとき，(SHE) の中心多様体は存在して，縮約原理も成り立ちます．

4　偏微分方程式の分岐解析

この章では，偏微分方程式の分岐解析の方法を説明します．本章においても関数空間などの細かい設定に関する記述がありますが，それらを読み飛ばしても，分岐解析の方法とそれから導かれる結果については理解して頂けると思います．

まずは，前章で考えた Swift-Hohenberg 方程式から考えます．この章から読み始める方のために，もう一度，方程式と関数空間の設定から始めます．

4.1　Swift-Hohenberg 方程式

Swift-Hohenberg 方程式

$$\text{(SHE)} \qquad u_t = -u_{xxxx} - 2u_{xx} - (1-\nu)u - u^3, \quad x \in (0, \ell)$$

を周期 ℓ の周期関数の空間（相空間）

$$X = H^4_{per} := \{u \in H^4_{loc}\,;\, u(x) = u(x+\ell)\},$$
$$Y = Z = L^2_{per} := \{u \in L^2_{loc}\,;\, u(x) = u(x+\ell)\}$$

において考えます．ここで未知関数 $u(t,x)$ は実数値関数です．未知関数を

$$u = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m(t) e^{imk_0x}, \quad k_0 = 2\pi/\ell$$

とフーリエ級数展開して (SHE) に代入すると

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \dot{u}_m e^{imk_0x} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda_m u_m e^{imk_0x} \\ &\quad + \sum_{m_1\in\mathbb{Z}}\sum_{m_2\in\mathbb{Z}}\sum_{m_3\in\mathbb{Z}} u_{m_1}u_{m_2}u_{m_3} e^{i(m_1+m_2+m_3)k_0x} \qquad (4.1)\end{aligned}$$

となります．ただし，u は実数値関数ですから $u_m(t) = -\overline{u_m}(t)$ でなければなりません．ここで，

$$\lambda_m = \nu - (1 - m^2k_0^2)^2$$

は自明解 $u(t,x)\equiv 0$ の周りにおける線形化作用素の固有値であり，固有関数は

$$e^{\pm imk_0x}$$

です． 各固有空間への射影作用素 $\mathbf{P}_n$ を

$$\mathbf{P}_n u = \frac{1}{\ell}\left(\int_0^\ell u e^{-ink_0x}\,dx\right)e^{ink_0x},\quad n\in\mathbb{Z}$$

で定めます．実際に，(4.1) の両辺に e^{-ink_0x} を乗じて $(0,\ell)$ 上積分すると，

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^\ell \dot{u}_m e^{-i(m-n)nk_0x}dx\\
&=\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}}\int_0^\ell \dot{u}_m e^{-i(m-n)nk_0x}dx+\int_0^\ell \dot{u}_n dx=\ell\dot{u}_n,\\
&\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^\ell \lambda_m u_m e^{-i(m-n)nk_0x}dx=\ell\,\lambda_m\,u_m,\\
&\sum_{m_1\in\mathbb{Z}}\sum_{m_2\in\mathbb{Z}}\sum_{m_3\in\mathbb{Z}}\int_0^\ell u_{m_1}u_{m_2}u_{m_3}e^{i(m_1+m_2+m_3-n)k_0x}\\
&=\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}\\ m_1+m_2+m_3\neq n}}\int_0^\ell u_{m_1}u_{m_2}u_{m_3}e^{i(m_1+m_2+m_3-n)k_0x}\\
&+\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}\\ m_1+m_2+m_3= n}}\int_0^\ell u_{m_1}u_{m_2}u_{m_3}e^{i(m_1+m_2+m_3-n)k_0x}\\
&=\ell\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}\\ m_1+m_2+m_3= n}}u_{m_1}u_{m_2}u_{m_3}
\end{aligned}$$

ですから，

$$(\mathrm{SHE})_{\mathrm{F}}\qquad \dot{u}_n=\lambda_n u_n-\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}\\ m_1+m_2+m_3= n}}u_{m_1}u_{m_2}u_{m_3},\quad n\in\mathbb{Z}\tag{4.2}$$

となります．この方程式の相空間はフーリエ係数 $\{u_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ の空間

$$X_F:=\{\{u_m\}_{m\in\mathbb{Z}};\ u_{-m}=\overline{u_m},\ \|\{u_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\|_{X_F}^2:=\sum_{m\in\mathbb{Z}}(1+m^2)^4|u_m|^2<\infty\}$$

です．X_F の元 $\{u_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ は射影作用素 $\mathbf{P}_n : L^2_{per} \to L^2_{per}$, $n \in \mathbb{Z}$ によって， 関数空間 H^4_{per} の元 $u(t,x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m(t) e^{imk_0x} \in H^4_{per}$ と同一視できます:

$$\{u_m\}_{m\in\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{1}{\ell} \int_0^\ell (\mathbf{P}_m u)\, e^{-imk_0x} dx \right\}_{m\in\mathbb{Z}}$$

$j \in \mathbb{Z}$ を一つ固定します．$(\nu, k_0) = (0, 1/|j|)$ ならば

$$\lambda_{\pm j} = 0, \quad \lambda_m < 0,\, m \in \mathbb{Z} \setminus \{-j, j\}$$

です．したがって

$$\dot{\lambda}_{\pm j} = 0, \tag{4.3}$$

$$\dot{u}_j = 0 \cdot u_j + \lambda u_j - \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z} \\ m_1+m_2+m_3=j}} u_{m_1} u_{m_2} u_{m_3}, \tag{4.4}$$

$$\dot{\overline{u_j}} = 0 \cdot \overline{u_j} + \lambda \bar{u}_j - \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z} \\ m_1+m_2+m_3=-j}} u_{m_1} u_{m_2} u_{m_3}, \tag{4.5}$$

$$\dot{u}_m = \lambda_m u_m - \sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z} \\ m_1+m_2+m_3=m}} u_{m_1} u_{m_2} u_{m_3}, \quad (|m| \neq |j|)\,. \tag{4.6}$$

ここで，はじめの自明な方程式 $\dot{\lambda}_{\pm j} = 0$ を考えることにより，中心多様体 $\mathcal{M}_0 \subset X_F \times \mathbb{R}$ は十分小さい正数 s ついて，$|\lambda_j| < s$ を満たす ν, k_0 に対して構成できます（(ν, k_0)-空間において，ある $(0, 1/|j|)$ の近傍 $\mathcal{U}_p$ がとれて，$(\nu, k_0) \in \mathcal{U}_p$ である限り，縮約原理が成り立つようにできる）．また，$u_j = \overline{u_{-j}}$ より u_j について考えれば十分です．

実際に，縮約方程式を導出してみましょう．中心多様体定理によれば，$|m| \neq j$ に対して，

$$u_m = h_m(u_j, \overline{u_j}, \lambda_j), \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{-j, j\} \tag{4.7}$$

とグラフで表され，かつ

$$h_m(0,0,0) = \frac{\partial h_m}{\partial u_j}(0,0,0) = \frac{\partial h_m}{\partial \overline{u_j}}(0,0,0) = \frac{\partial h_m}{\partial \lambda_j}(0,0,0) = 0$$

が成り立ちます．第２章と全く同様に，(4.7) の両辺を t で微分すると

$$
\begin{aligned}
&\lambda_m h_m(u_j,\overline{u_j},\lambda_j)-\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}\\ m_1+m_2+m_3=m}} u_{m_1}u_{m_2}u_{m_3}\\
&=\frac{\partial h}{\partial u_j}\dot{u}_j+\frac{\partial h}{\partial \overline{u_j}}\dot{\overline{u_j}}+\frac{\partial h}{\partial \lambda_j}\dot{\lambda}_j\,.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\|\{u_m\}_{m\in\mathbb{R},|m|\neq|j|}\|_{X_F}+|\lambda_j|=O(\delta)
$$

である限り，

$$
h_m(u_j,\overline{u_j},\lambda_j)=O(\delta^2)
$$

です．(4.4) の非線型項は ３次ですから，Σ における m_1,m_2,m_3 にのうち，いずれか１つでも $|j|$ と等しくなければ，その項は３次以上となります．したがって，$|m_j|=|j|$ のときを選んで計算すると $j+j-j=j$ の組み合わせしかありません．$j,\,j,\,-j$ の並び方は３通り：

$$
(m_1,m_2,m_3)=(j,\,j,\,-j),\quad (j,\,-j,\,j),\quad (-j,\,j,\,j)
$$

ですから，結局

$$
\dot{u}_j=\lambda_j u_j-3u_j^2u_{-j}+h.o.t..
$$

したがって，

$$
\dot{u}_j=\lambda_j u_j-3u_j|u_j|^2+h.o.t \tag{4.8}
$$

が得られます．

ここで，簡単のために $u_j(t)\in\mathbb{R}$ に制限して考えてみましょう．$z=u_j\in\mathbb{R},\lambda_j=C$ とおいて高次項を無視すると

$$
\dot{z}=Cz-3z^3 \tag{4.9}
$$

を得ます．したがって，$z(t)\equiv 0$ は常に解であり $C<0$ ならば漸近安定，$C>0$ ならば不安定です．さらに $C=0$ において２つの平衡解

$$
z(t)\equiv\pm\sqrt{C/3}
$$

が分岐します．これは超臨界熊手型分岐ですから，いずれの平衡解も $C > 0$ において漸近安定な解であることが分かります．これらの定常解は，元の Swift-Hohenberg 方程式の（偶関数に制限された）　局所漸近安定な定常解

$$u(x) = \pm 2\sqrt{\lambda_j/3}\cos(2\pi jx/\ell) + O(\|u\|^4_{H^2_{per}})$$

に対応しています．この解は，$\lambda_j > 0$ で分岐することが分かります．これは，中心多様体定理を用いる際に（λ_j が 0 の近くにおいて分岐方程式が有効となるように）(4.3) を付け加えたことによる恩恵です．また，(SHE) は変換

$$u(t,x) \to u(t,x+\theta) \quad \text{for all } \theta \in \mathbb{R}$$

に関して不変（$u(t,x)$ が解ならば，$u(t,x+\theta)$ も解）です．したがって，局所漸近安定な定常解の族

$$u(x) = \pm 2\sqrt{\lambda_j/3}\cos(2\pi jx/\ell + \theta) + O(\|u\|^4_{H^2_{per}}), \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

が $\lambda_k = 0$, すなわち $(\nu, k_0) = (\nu, 2\pi/L) = (0, 1/|j|)$ において分岐することが分かります．こうして，(SHE) の自明解からの分岐について解析することができました．

最後に，いくつかの注意を述べてこの節を終わりにします．まず，ここでの解析では縮約原理が有効なパラメータ値を選びました．しかし，不安定固有値がある場合でも中心多様体は局所不変な多様体として存在します．したがって，(ν, k_0) を動かしたとき，それらが曲線 C_m を横切るたびに非自明な定常解が分岐することが分かります（この場合，中心多様体はもはや局所吸引的ではないので，そのような定常解はすべて不安定です）．

次に，$n, j \in \mathbb{Z}$, $|n| \neq |j|$ について曲線 C_n と C_j を考えましょう．C_n 上では $\lambda_n = 0$, C_j 上では $\lambda_j = 0$ でしたから，それらの共有点では $\lambda_n = \lambda_j = 0$ となります．このような点を多重臨界点と呼び，その周りではより複雑なダイナミクスが現れます．Swift-Hohenberg 方程式の多重臨界点における結果については [18] の 3.5 節を参照してください．また，

次節では，ある種の反応拡散系の多重臨界点における力学系について考えます.

また，非線形項 $-u^3$ をある種の２次の非線形性に取り替えた場合には，h_m について２次の項まで求める必要があります．さらに，分岐解として変調周期進行波解やヘテロクリニック軌道などの解軌道が現れます．２次の非線形性を持つ場合の縮約方程式の導出については，[18] の 3.5 節および [12] を，変調周期進行波解やヘテロクリニック軌道などの解析については [11] を参照してください.

4.2 反応拡散方程式系

この節では，次の積分-反応拡散方程式系（*Integro-Reaction-Diffusion system*）:

$$\text{(IRD)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au + bv + F(u,v) + \dfrac{s}{\ell}\displaystyle\int_0^\ell u(t,x)\ dx,\ x \in (0,\ell), t > 0, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + cu + dv + G(u,v),\ x \in (0,\ell), t > 0, \end{cases}$$

をノイマン境界条件

$$\text{(NBC)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ at } x = 0, \ell$$

のもとで考えます．ここで，D_1, D_2 は拡散係数，ℓ は区間幅，a, b, c, d, s は実数の係数です.

(IRD) を以下の仮定の下で考えます.

- (A1) 関数 F, G は $F(\xi,\eta) = O(|(\xi,\eta)|^3)$, $G(\xi,\eta) = O(|(\xi,\eta)|^3)$ を満たす十分滑らかな実数値関数；
- (A2) $F(u,v) \equiv -F(-u,-v)$, $G(u,v) \equiv -G(-u,-v)$；
- (A3) $a, c > 0$, $b, d < 0$, $a + d < 0$, $\Delta := ad - bc > 0$ ；

- (A4) $\dfrac{bc}{d} + d < 0$.

この節では，[17] で得られた結果のいくつかについて説明します．

考えるのは，自明解 $(u(t,x), v(t,x)) \equiv 0$ からの局所分岐です．関数空間として

$$\{(u,v) \in H^2(0,\ell) \times H^2(0,\ell)\,;\, u, v \text{ satisfiy (NBC)}\}$$

と設定してみましょう．自明解のまわりでの線形化作用素を L とすると

$$L\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 u'' + au + bv + (s/\ell)\int_0^\ell u\,dx \\ D_2 v'' + cu + dv \end{pmatrix}$$

です．ノイマン境界条件下で考えますので，未知関数をフーリエ余弦級数展開して固有値を求めることが出来ます．ただし，余弦級数展開のままだと非線形項の計算が煩雑になります．

一方，前節で見たようにもし周期境界条件下の問題に拡張できれば，すこし計算が楽になります．$(u_*(t,x), v_*(t,x))$ を $t > 0$, $x \in [0,\ell]$ 上の (IRD) の解とします．このとき， $t > 0$, $x \in [0, 2\ell]$ 上の新しい関数 $(u_{**}(t,x), v_{**}(t,x))$ を

$$(u_{**}(t,x), v_{**}(t,x)) = \begin{cases} (u_*(t,x), v_*(t,x)), & x \in [0,\ell) \\ (u_*(t, 2\ell - x), v_*(t, 2\ell - x)), & x \in [\ell, 2\ell] \end{cases}$$

で定義します．すなわち，(u_{**}, v_{**}) は $x = \ell$ において (u_*, v_*) を対称に折り返した（$x = \ell$ において偶関数となる）関数です．同様に，$\ell = \ldots, -\ell, -2\ell, \ell, 0, 4\ell, \ldots$ において折り返して $x \in \mathbb{R}$ 上に拡張した関数を (u_{per}, v_{per}) とすると，u_{per}, v_{per} は $x \in \mathbb{R}$ 上の周期 2ℓ の周期関数であって

$$(\mathrm{IRD}') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au + bv + F(u,v) + \dfrac{s}{2\ell}\displaystyle\int_0^{2\ell} u(t,x)\;dx, \;\; x \in (0, 2\ell), t > 0, \\[2em] \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + cu + dv + G(u,v), \;\; x \in (0, 2\ell), t > 0, \end{cases}$$

の解となります．逆に，周期 2ℓ を持つ (IRD$'$) の解であって

$$(u(t,x), v(t,x)) = (u(t,-x), v(t,-x)) \tag{4.10}$$

を満たす関数を $(0,\ell)$ に制限したものは，(IRD)-(NBC) の解となります．
(IRD$'$) に対して，その相空間を

$$X = \{(u,v) \in H^2_{per} \times H^2_{per}\,;\, u,v \text{ satisfiy } (4.10)\}$$

とし，

$$Y = Z = \{(u,v) \in L^2_{per} \times L^2_{per}\,;\, u,v \text{ satisfiy } (4.10)\}$$

とします．

非線形項 F,G を

$$F(u,v) = \sum_{j+k=3} F_{jk} u^j v^k + o(\|(u,v)\|^3_X),$$
$$G(u,v) = \sum_{j+k=3} G_{jk} u^j v^k + o\|(u,v)\|^3_X),$$

$$F_{jk} = \frac{1}{j!k!}\frac{\partial^{jk} F}{\partial u^j \partial v^k}(0,0), \quad G_{jk} = \frac{1}{j!k!}\frac{\partial^{jk} G}{\partial u^j \partial v^k}(0,0), \quad j+k=3,\, j,k \in \mathbb{N}.$$

とテイラー展開し，未知関数 u,v を

$$u(t,x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m(t) e^{imk_0 x},$$
$$v(t,x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} v_m(t) e^{imk_0 x}, \qquad (k_0 = \pi/\ell)$$

とフーリエ級数展開して (IRD$'$)-(PBC) に代入し，さらに前節と同様にして射影作用素 $\mathbf{P}_m$:

$$\mathbf{P}_n(u,v) = \frac{1}{2\ell}\left(\int_0^\ell (u,v) e^{-ink_0 x}\,dx\right) e^{ink_0 x}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

を作用させると

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} = M_m \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_m \\ G_m \end{pmatrix}, m \geq 0, \qquad (4.11)$$

を得ます．ここで

$$M_m = \begin{cases} \begin{pmatrix} a+s & b \\ c & d \end{pmatrix} & (m=0), \\ \\ \begin{pmatrix} a - D_1 m^2 k_0^2 & b \\ c & d - D_2 m^2 k_0^2 \end{pmatrix} & (m \neq 0), \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} F_m = \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ m_1,m_2,m_3 \in \mathbb{Z}}} & (F_{30} u_{m_1} u_{m_2} u_{m_3} + F_{21} u_{m_1} u_{m_2} v_{m_3} \\ & + F_{12} u_{m_1} v_{m_2} v_{m_3} + F_{03} v_{m_1} v_{m_2} v_{m_3}), \\ G_m = \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ m_1,m_2,m_3 \in \mathbb{Z}}} & (G_{30} u_{m_1} u_{m_2} u_{m_3} + G_{21} u_{m_1} u_{m_2} v_{m_3} \\ & + G_{12} u_{m_1} v_{m_2} v_{m_3} + G_{03} v_{m_1} v_{m_2} v_{m_3}) \end{aligned}$$

です．(4.11) の相空間は $\mathbb{X}_F := X_F \times X_F$

$$X_F := \{\{\alpha_m\}_{m\in\mathbb{Z}};\ \alpha_m = \overline{\alpha_{-m}} \in \mathbb{R},\ \|\{\alpha_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\|_{X_F}^2 := \sum_{m\in\mathbb{Z}} (1{+}m^2)^2 |\alpha_m|^2 < \infty\}$$

ととれます．また，やはり前節と同様に $\{(u_m, v_m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{X}_F$ と $(u,v) \in X$ は射影作用素 $\mathbf{P}_m$ によって同一視できます：

$$\{(u_m, v_m)\}_{m\in\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{1}{2\ell} \int_0^\ell (\mathbf{P}_m(u,v))\, e^{-imk_0x} dx \right\}_{m\in\mathbb{Z}}.$$

4.2.1 中心多様体縮約

さて，(4.11) に対して中心多様体定理を適応して分岐を調べましょう．そのためにはまず固有値を調べる必要があります．(IRD′)-(PBC) の自明解周りの線形化作用素の固有値 $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ は 行列 $\{M_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ の固有値として与えられます．したがって，0 固有値が現れるための必要十分条件は

$$\det M_m = 0$$

です．ここで，D_2, k_0, s についての連立方程式

$$\det M_0 = \det M_1 = \det M_2 = 0$$

を直接計算して，つぎの定理を証明することが出来ます ([16], [17]).

定理

線形作用素 L は

$$k_0 = k_0^* := \left[\frac{1}{8dD_1} \left\{ 5\Delta - \sqrt{25\Delta^2 - 16ad\Delta} \right\} \right]^{1/2},$$

$$D_2 = \frac{\{dD_1(k_0^*)^2 - \Delta\}}{(k_0^*)^2\{D_1(k_0^*)^2 - a\}},$$

$$s = s^* := -\Delta/d,$$

において 3 つの 0 固有値を持ち，さらにそれ以外のすべての固有値は負の実固有値である.

次に中心多様体定理を適応するためには，レゾルベントについて (3.2)，もしくは (3.4) を得る必要がありますが，ここでは $\mathbf{v} = (u, v) \in X$ に対して作用素 $L' : X \to Z$

$$L' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 u'' + au + bv + (s/(2\ell)) \int_0^{2\ell} u\, dx \\ D_2 v'' + cu + dv \end{pmatrix}$$

が半群

$$T(t)\mathbf{v} := e^{L't}\mathbf{v} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{M_m t} \mathbf{P}_m \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in X$$

を生成することより，中心多様体定理が適応できることが分かります．実際，M_m, $(m \in \mathbb{Z})$ の固有値は 6 つ ($m = 0, \pm 1, \pm 2)$ が 0 でそれ以外はすべて負であることと

$$\left\{ \frac{1}{2\ell} \int_0^{\ell} (\mathbf{P}_m(u, v))\, e^{-imk_0 x} dx \right\}_{m \in \mathbb{Z}} = \{(u_m, v_m)\}_{m \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{X}_F$$

より，

$$\left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{M_m t}\mathbf{P}_m\mathbf{v}\right\| \le \sum_{m\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{P}_m\mathbf{v}\| < \infty.$$

従って，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+0}\left(e^{L't}\mathbf{v}-\mathbf{v}\right)/t &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\lim_{t\to+0}\left(e^{M_m t}\mathbf{P}_m\mathbf{v}-\mathbf{P}_m\mathbf{v}\right)/t\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} M_m\mathbf{P}_m\mathbf{v} = L'\mathbf{v}\end{aligned}$$

が確かめられます（したがって，$-L'$ は角域作用素）.

0 固有値に対応する固有空間を張る固有ベクトルを求めましょう．固有ベクトルは $(k_0, D_2, s) = (k_0^*, D_2^*, s^*)$ において 3 つの行列 M_0, M_1, M_2 を対角化する操作によって求まります：

$$T_0 = \begin{pmatrix} -d & bc/d \\ c & c \end{pmatrix}, T_m = \begin{pmatrix} -d + D_2 m^2 k_0^2 & a - D_1 m^2 k_0^2 \\ c & c \end{pmatrix}, m = 1, 2,$$

とすると，

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}}_m \\ \dot{\tilde{v}}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu_m^- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{u}_m \\ \tilde{v}_m \end{pmatrix} + T_m^{-1}\begin{pmatrix} \tilde{f}_m \\ \tilde{g}_m \end{pmatrix}, m = 0, 1, 2.$$

ここで

$$\begin{aligned}&\mu_0^- := d + bc/d,\\ &\mu_m^- := (a+d) - m^2(D_1 + D_2^{1,2})(k_0^{1,2})^2,\\ &\tilde{f}_m := f_m|_{{}^t(u_{m_j}, v_{m_j}) = T_m\,{}^t(\tilde{u}_{m_j}, \tilde{v}_{m_j})},\\ &\tilde{g}_m := g_m|_{{}^t(u_{m_j}, v_{m_j}) = T_m\,{}^t(\tilde{u}_{m_j}, \tilde{v}_{m_j})}\end{aligned}$$

です．中心多様体定理によれば，

$$\begin{aligned}&\tilde{v}_j = h_j^{(2)}(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2), \quad j = 0, 1, 2,\\ &(u_m, v_m) = (h_m^{(1)}, h_m^{(2)})(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2), \quad m \in \mathbb{N}\setminus\{1, 2\}\end{aligned}$$

とグラフで表され，

$$\frac{\partial h_m^{(j)}}{\partial \tilde{u}_j}(0,0,0) = h_m^{(j)}(0,0,0) = 0, \quad j=1,2$$

が成り立ちます．前節と同様に，$h^(j)_m$ についての方程式を考えると，(IRD') においてもやはり２次の非線型性がないので，$h_m^{(j)} = O(|\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2|^3)$ であることが分かります．したがって，次の定理を得ます ([16], [17])：

定理

与えられた定数 a, b, c, d, D_1 に対して，$(k_0, D_2, s) = (k_0^*, D_2^*, s^*)$ の近傍において，(IRD) の局所吸引的な中心多様体 $\mathcal{W}_{loc}^c$ が存在し，その上での (IRD) の流れは次の常微分方程式から定まる流れと局所位相同値である：

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = (\mu_0 + a_1 z_0^2 + a_2 z_1^2 + a_3 z_2^2) z_0 + a_4 z_1^2 z_2 + o(|(z_0, z_1, z_2)|^3), \\ \dot{z}_1 = (\mu_1 + b_1 z_0^2 + b_2 z_1^2 + b_3 z_2^2) z_1 + b_4 z_0 z_1 z_2 + o(|(z_0, z_1, z_2)|^3), \\ \dot{z}_2 = (\mu_2 + c_1 z_0^2 + c_2 z_1^2 + c_3 z_2^2) z_2 + c_4 z_0 z_1^2 + o(|(z_0, z_1, z_2)|^3). \end{cases} \tag{4.13}$$

ここで

$$z_j(t) = \tilde{u}_j(t) = \frac{c u_j(t) - (a - D_1 j^2 k_0^2) v_j(t)}{c[j^2 k_0^2 (D_1 + D_2) - (a+d)]} \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, 2$$

である．係数 μ_j, a_j, b_j, c_j は，(IRD) の係数から定まる定数である．

詳細は [16] を参照のこと．

4.2.2　１モード定常解からの２次分岐

(4.13) を３次で打ち切った力学系：

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = (\mu_0 + a_1 z_0^2 + a_2 z_1^2 + a_3 z_2^2) z_0 + a_4 z_1^2 z_2, \\ \dot{z}_1 = (\mu_1 + b_1 z_0^2 + b_2 z_1^2 + b_3 z_2^2) z_1 + b_4 z_0 z_1 z_2, \\ \dot{z}_2 = (\mu_2 + c_1 z_0^2 + c_2 z_1^2 + c_3 z_2^2) z_2 + c_4 z_0 z_1^2. \end{cases} \tag{4.14}$$

を考えましょう．ここでは特に，(4.14) の定常解：

$$(z_0(t), z_1(t), z_2(t)) = (0, \pm z_1^*, 0), \quad z_1^* = \sqrt{-\mu_2/b_2}$$

のからの２次分岐について考えます．

$$\mathbf{e}_1 := (0, \pm z_1^*, 0)$$

とします． μ_1 を $\mathbf{e}_1$ が存在すように（$\mu_1 b_2 < 0$ となるように）１つ固定します．定常解 $\mathbf{e}_1$ の周りの線形化行列は

$$M_{\mathbf{e}_1} := \begin{pmatrix} -2\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -c_4\mu_1/b_2 & \gamma \end{pmatrix},$$
$$\alpha = \mu_0 - a_2\mu_1/b_2, \quad \beta = -a_4\mu_1/b_2 \quad \text{and} \quad \gamma = \mu_2 - c_2\mu_1/b_2$$

で与えられます．もし $a_4c_4 < 0$ ならば，(μ_0, μ_2) 平面上の直線：

$$\{(\mu_0, \mu_2)\,;\, \mathrm{tr}\,\tilde{M}_{\mathbf{e}_1}\} = \{(\mu_0, \mu_1)\,;\, \mu_0 + \mu_2 - (a_2 + c_2)\mu_1/b_2 = 0\}$$

と曲線：

$$\begin{aligned} \mathcal{SB} &= \{(\mu_0, \mu_2)\,;\, \det \tilde{M}_{\mathbf{e}_1} = 0\} \\ &= \{(\mu_0, \mu_2)\,;\, (\mu_0 - a_2\mu_1/b_2)(\mu_2 - c_2\mu_1/b_2) - a_4c_4\mu_1^2/b_2^2 = 0\} \end{aligned}$$

は２つの共有点 $(\mu_0, \mu_2) = (\mu_0^{\pm}, \mu_2^{\pm})$ を持ちます．すなわち，$M_{\mathbf{e}_1}$ が ２つの 0 固有値を持ちます．そのような (μ_0, μ_2) の値は

$$\mathrm{tr}\,\tilde{M}_{\mathbf{e}_1} = \det \tilde{M}_{\mathbf{e}_1} = 0$$

を μ_0, μ_2 について直接解くことで求まります．

$\mu_j = \mu_j^{P(\pm)}$, $(j = 0, 2)$ とすると，M_{e_1} のジョルダン標準形を

$$T^{-1} M_{\mathbf{e}_1} T = \begin{pmatrix} -2\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\beta & 0 \\ 0 & \alpha-\gamma & -2 \end{pmatrix}.$$

ととることが出来ます．

目標は，(4.14) について再び中心多様体定理を用いることにより，$\pm\mathbf{e}_1$ からの２次分岐を決定する分岐方程式を求めることです（もし $b_2 < 0$ なら中心多様体は局所吸引的です）．

$$\tilde{z}_1 = z_1 - z^*, \quad z^* = \sqrt{-\mu_1/b_2}$$

とします．$(\tilde{z}_1(t), z_0(t), z_2(t))$ は次の微分方程式系を満たします：

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{z}}_1 \\ \dot{z}_0 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -c_4\mu_1/b_2 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ z_0 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1(\tilde{z}_1, z_0, z_2) \\ N_0(\tilde{z}_1, z_0, z_2) \\ N_2(\tilde{z}_1, z_0, z_2) \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} N_0(\tilde{z}_1, z_0, z_2) &= 2a_4 z^* \tilde{z}_1 z_2 + 2a_2 z^* \tilde{z}_1 z_0 + F_0(\tilde{z}_1, z_0, z_2), \\ N_1(\tilde{z}_1, z_0, z_2) &= b_1 z^* z_0^2 + 3b_2 z^* \tilde{z}_1^2 + b_3 z^* z_2^2 + b_4 z^* z_0 z_2 + F_1(\tilde{z}_1, z_0, z_2), \\ N_2(\tilde{z}_1, z_0, z_2) &= 2c_2 z^* \tilde{z}_1 z_2 + 2c_4 z^* \tilde{z}_1 z_0 + F_2(\tilde{z}_1, z_0, z_2). \end{aligned}$$

いま，新しい変数 (z, x, y) を

$$\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

によって導入しましょう．このとき，ある (μ_0, μ_2) から定まる実数 p_1, p_2, $|p_j| \ll 1$ が存在して，(4.15) は以下の形に変形できます：

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 1 \\ 0 & 0 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{N}_1(z, x, y) \\ \tilde{N}_0(z, x, y) \\ \tilde{N}_2(z, x, y) \end{pmatrix}, \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_1(z,x,y) &= N_1(z,-2\beta x,(\alpha-\gamma)x-2y),\\
\tilde{N}_0(z,x,y) &= N_0(z,-2\beta x,(\alpha-\gamma)x-2y),\\
\tilde{N}_2(z,x,y) &= N_2(z,-2\beta x,(\alpha-\gamma)x-2y).
\end{aligned}$$

定理

$|p_j| < 2\mu_1$, $j=1,2$ である限り, (4.14) の中心多様体 $\mathcal{M}^c$ が存在し，$\mathcal{M}^c$ 上の (4.16) の定める流れは，次の微分方程式が定める流れと局所位相同意である：

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & 1 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \sum_{\substack{j,k\in\mathbb{N}\\ j+k=3}} \begin{pmatrix} f_{jk}\, x^j y^k \\ g_{jk}\, x^j y^k \end{pmatrix}, \tag{4.17}$$

where

$$\begin{aligned}
f_{30} &= 2z^*(a_2 - a_4\alpha/\beta)H_{20} + 4(a_1\beta^2 + a_3\alpha^2),\\
f_{21} &= 2a_4 z^* H_{20}/\beta + 2z^*(a_2 - a_4\alpha/\beta)H_{11} - 8a_3\alpha,\\
f_{12} &= 2a_4 z^* H_{11}/\beta + 2z^*(a_2 - a_4\alpha/\beta)H_{02} + 4a_3,\\
f_{03} &= 2a_4 z^* H_{02}/\beta,\\
g_{30} &= 2z^*[(a_2-c_2)\alpha\beta - a_4\alpha^2 + c_4\beta^2]H_{20}/\beta + 4\alpha[(a_1-c_1)\beta^2 + (a_3-c_3)\alpha^2],\\
g_{21} &= 2z^*(a_4\alpha/\beta + c_2)H_{20} + 2z^*[\alpha(a_2-c_2) - a_4\alpha^2/\beta + c_4\beta]H_{11}\\
&\quad +4[\alpha^2(3c_3 - 2a_3) + \beta^2 c_1],\\
g_{12} &= 2z^*[(a_2-c_2)\alpha - a_4\alpha^2/\beta + c_4\beta]H_{02} + 2z^*(a_4\alpha/\beta + c_2)H_{11} + 4\alpha(a_3 - 3c_3),\\
g_{03} &= 2z^*(a_4\alpha/\beta - c_2)H_{02} + 4c_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{20} &= \frac{2z^*}{\mu_1}(\beta^2 b_1 + b_3\alpha^2 - \beta b_4\alpha),\\
H_{11} &= \frac{2z^*}{\mu_1}(\beta b_4 - 2\alpha b_3) - \frac{H_{20}}{\mu_1},\\
H_{02} &= \frac{z^*}{\mu_1^2}[2b_3(\mu_1+\alpha) + b_4\beta] - \frac{H_{11}}{2\mu_1^2}.
\end{aligned}$$

詳細は省きますが，この定理は（考えているのは常微分方程式です）第２章と同様にして中心多様体の多項式近似を求めることで証明できます（必要なのは細かい多項式の計算をやりきる腕力です．あるいは数式処理ソフトを使うと効率的です）．

さて，(4.17) の定める力学系を解析したいのですが，実はこれはもっと簡単な形（標準形）に変形できることが知られています．次章以降では標準形理論の概要を説明します．

この章の最後に注意を述べます．(4.16) の線形部分は $p_1 = p_2 = \mu_1 = 0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

の形をしてします．また，(4.16) は

$$(z, x, y) \to (z, -x, -y)$$

なる変換について不変です．こうした状況で一般的な標準形（標準形については次章で説明しますが）において，カオスが現れることが Dumorutier-Kokubu [13] によって示されています．この結果が，$\mu_1 b_2 < 0$ などの制限の下で (4.16) においても成り立つかどうかについては，現在計算中です．

5 標準形理論

実際に (4.17) の標準形を計算する前に標準形理論について簡単に説明します．詳細は [3] の 3.3 節, [6] の 3 章 , [9] の 19 章，および [8] と論文 [14] を参照してください．また，[18] の 3.3 節にもホップ分岐の標準形についての具体的な計算手順があります．ここでは [14] において示され

た方法を説明します．

5.1 標準形理論の概要

次の $\mathbb{R}^n$ における常微分方程式

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = Lx + F(x), \quad x(t) \in \mathbb{R}, \\ &F(x) = O(x^2). \end{aligned} \tag{5.1}$$

を考えましょう．目的は (5.1) を適当な座標変換によって可能な限り簡単な形に変換することです．$F(x)$ は十分滑らかな関数としてそのテイラー展開

$$F(x) = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N} \\ p\geq 2}} F_p[x^{(p)}]$$

を考えましょう．

H_k を $\mathbb{R}^n$ に値を取る k 次のベクトル値斉次多項式の空間とします．H_k はスカラー値の k 次の斉次多項式の空間 $\mathcal{H}_k$ と $\mathcal{R}^n$ の直積として表されます：

$$H_k = \mathcal{H}_k \otimes \mathcal{R}^n.$$

例えば，$x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ のとき，

$$\mathcal{H}_2 = span\{x^2, xy, y^2\}$$

であり，

$$\begin{aligned} H_2 &= \mathcal{H}_2 \otimes \mathbb{R}^2 = span\{x^2, xy, y^2\} \otimes span\{{}^t(1,0), {}^t(0,1)\} \\ &= span\left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

です．

定理 ([14], Theorem 2)
(5.1) の標準形を

$$\frac{dz}{dt} = F(z), \quad z \in \mathbb{R}^n$$

とすると $N(z)$ は

$$D_z N(z) \cdot L^* z - L^* N(z) = 0 \tag{5.2}$$

を満たす．ここで L^* は L の共役である．

言い換えると，L (L^*) によって定まる写像

$$ad_{L^*} : P(x) \mapsto D_x P(x) \cdot L^* x - L^* P(x) \tag{5.3}$$

を考えると (5.1) の非線形項 $F(x)$ のテイラー展開に含まれる項のうち，

$$ad_{L^*}[F] := D_x F(x) \cdot L^* x - L^* F(x) = 0$$

を満たさないものは適当な座標変換によって消去できる．

証明は [14] を参照のこと．

さて，[14] の 2.4 節に従って

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

のときの標準形を実際に求めてみましょう．

考えるのは微分方程式系

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad {}^t(x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{5.5}$$

です．(5.3) により，

$$\begin{pmatrix} (F_1)_x & (F_1)_y \\ (F_2)_x & (F_2)_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (F_1)_x & (F_1)_y \\ (F_2)_x & (F_2)_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x(F_1)_y \\ x(F_2)_y - F_1 \end{pmatrix} = 0$$

となるはずです．従って，

$$x\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0, \quad x\frac{\partial F_2}{\partial y} = F_1$$

を得ます．第 1 式より，$F_1 = f(x)$ ですが，第 2 式から $F_2 = yf(x)/x + g(x)$ となります．そこで，

$$F_1(x) = f(x) = x\varphi_1(x)$$

ととると

$$F_2 = y\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

を得ます．$\varphi_2 = \beta(x) + \alpha(x)$ として

$$\begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \varphi_1(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \beta_(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \alpha_(x).$$

${}^t(F_1, F_2) \in H_2$ となる場合を考えると

$$(F_1, F_2) = (ax^2, axy + bx^2)$$

を得ます．${}^t(F_1, F_2) \in H_3$ となる場合を考えると

$$(F_1, F_2) = (ax^3, ax^2y + bx^3)$$

を得ます．すなわち，${}^t(F_1, F_2) \in H_k$ となる場合を考えると

$$(F_1, F_2) = (ax^k, ax^{k-1}y + bx^k). \tag{5.6}$$

ここで，

$$(P_1, P_2) = (-ax^k, -ax^{k-1}y) \in H_k \tag{5.7}$$

を考えるとこれは

$$ad_{L^*}[(P_1, P_2)] = 0$$

を満たします．従って，

$$ad_{L^*}[(P_1, P_2) + (ax^k, ax^{k-1}y + bx^k)] = ad_{L^*}[(0, ax^{k-1}y + b'x^k)] = 0.$$

従って，標準形変換によって (5.5) は

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ ax^{k-1}y + bx^k \end{pmatrix}$$

と変換できることが分かります．

次に，$F(x)$ がパラメータを含むとき：$F = F(x; \mu)$ のときは次の定理によって標準形が計算できます．

定理 （[14], Theorem 5）
パラメータを含む微分方程式

$$\dot{x} = Lx + F(x; \mu)$$

の標準形を

$$\dot{z} = N(z; \mu)$$

とすると，

$$N(e^{L^* t} z; \mu) = e^{L^* t} N(z; \mu)$$

が成り立つ．ここで，$F(0; \mu) \in \ker L^*$ であって，$D_x F(0; \mu)$ は L^* と可換である．

証明は [14] を参照．

前の例 (5.4):

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を考えましょう．このとき，${}^t(0, \mu) \in \ker L^*$ であり，L^* と可換な行列は L^* 自身と単位行列 E ですから，

$$F(0; \mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}$$
$$DF(0; \mu) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu_3 & 0 \end{pmatrix}$$

の形をとることが分かります．さらに，

$$\begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 \\ 0 & -\mu_1 \end{pmatrix}$$

もまた L^* と可換なので

$$\begin{aligned} DF(0; \mu) &= \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 \\ 0 & -\mu_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu_3 & \mu_2' \end{pmatrix}, \quad (\mu_2' = \mu_3 - \mu_1) \end{aligned}$$

が最も簡単な形です．

斯くして，線形部分が (5.4) で与えられる微分方程式の標準形は

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ ax^{k-1}y + bx^k \end{pmatrix} + O(|(x, y)|^k)$$

で与えられることが分かります．

次節では，実際に (4.17) の標準形の係数を求めます．

5.2 標準形の計算の例

ここでは [8] の 8.4 節に従って，実際に標準形を計算してみましょう．(4.17) に対して，新しい変数 (u, w) を

$$
\begin{aligned}
u &= x, \\
w &= y + p_1 x + f_{30}\, x^3 + f_{21}\, x^2 y + f_{12}\, x y^2 + f_{03}\, y^3,
\end{aligned}
$$

によって導入します．(4.17) は次のように変形されます：

$$
\begin{aligned}
\dot{u} &= w, \\
\dot{w} &= \tilde{p}_1 u + \tilde{p}_2 w + \sigma_1\, u^3 + \sigma_2 u^2 w + (g_{12} + 2 f_{21}) u w^2 \\
&\quad + (g_{03} + f_{12}) w^3 + O(|(x, y)|^5) + (|p_1 + p_2||(x, y)|^3), \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\tilde{p}_1 = -p_1 p_2, \quad \tilde{p}_2 = p_1 + p_2, \quad \sigma_1 = g_{30}, \quad \sigma_2 = (g_{21} + 3 f_{30})
$$

です．ϵ, $|\epsilon| \ll 1$ に対して以下のスケール変換を行ないます:

$$
u = \epsilon \frac{\sqrt{|\sigma_1|}}{|\sigma_2|} U, \quad w = \epsilon^2 \frac{|\sigma_1|^{3/2}}{\sigma_2^2} W, \quad T = \epsilon \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right| t
$$

$$
\tilde{p}_1 = \epsilon^2 \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} P_1, \quad \tilde{p}_2 = \epsilon^2 \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right| P_2.
$$

$$
u = \epsilon \tilde{u}, \qquad w = \epsilon^2 \tilde{w}, \quad \tilde{t} = \epsilon t
$$

$$
p_1 = \epsilon^2 \tilde{p}_1, \quad p_2 = \epsilon^2 \tilde{p}_2,
$$

これによって

$$
\begin{aligned}
\frac{dU}{dT} &= W, \\
\frac{dW}{dT} &= P_1 U + \epsilon\ P_2 W + (\operatorname{sign} \sigma_1) U^3 + \epsilon\ (\operatorname{sign} \sigma_2)\ U^2 W + O(\epsilon^2).
\end{aligned} \qquad (5.9)
$$

を得ます．さらに，もし $\operatorname{sign}\sigma_2 = +1$ ならば 時間 t と W を反転させる：

$$T \to -T, \quad W \to -W,$$

ことにより，次の定理を得ます（[17]）：

定理

μ_1 を $b_2\mu_1 < 0$ となるように 1 つ固定する．座標変換とパラメータの変換，さらに時間変数の変換によって微分方程式系 (4.17) (これは (4.15) の中心多様体 $\mathcal{M}^c$ 上の流れを定める) は以下の微分方程式系に変換できる：

$$\begin{cases} \dot{u} = w, \\ \dot{w} = p_1 u + p_2 w + \varsigma u^3 - \epsilon\, u^2 w, \end{cases} \tag{5.10}$$

ここで $p_1 = P_1$，$p_2 = \epsilon P_2$ は分岐パラメータ, ϵ, $|\epsilon| \ll 1$ は正値のスケーリングパラメータ,

$$\varsigma = \operatorname{sign}\sigma_1 = \operatorname{sign} g_{30}.$$

である．

詳細は [17] を参照のこと．

ここまでの結果を纏めると，

- (IRD) の中心多様体上の力学系は (4.14) により定まる；
- (4.14) のある定常解の周りからの 2 次分岐は (4.17) により定まる；
- (4.17) は何回かの変換の後，(5.10) に変換できる；

ことを見ました．ここで少し先走って (5.10) の相平面解析の結果を図 3,4 に示します．これらの結果は chapter 4 of [1] の第 4 章，[3] の 7.3 節 にその詳細があります．

もとの偏微分方程式系 (IRD) の，非自明な定常解からの分岐を一般に調べるのはとても大変そうです（実際に大変です）．しかし，ここで調べたように多重臨界点の周りを調べることにより，局所的ではあるものの，非自明解からの分岐についての結果を知ることが出来ました．さらにこのケースでは２次分岐点が２重臨界点になっており，そこからの分岐は図 3,4 に示した通り，定常分岐以外の分岐についても知ることができます．

次節以降では，相平面解析によって分かる結果の幾つかについて説明します．

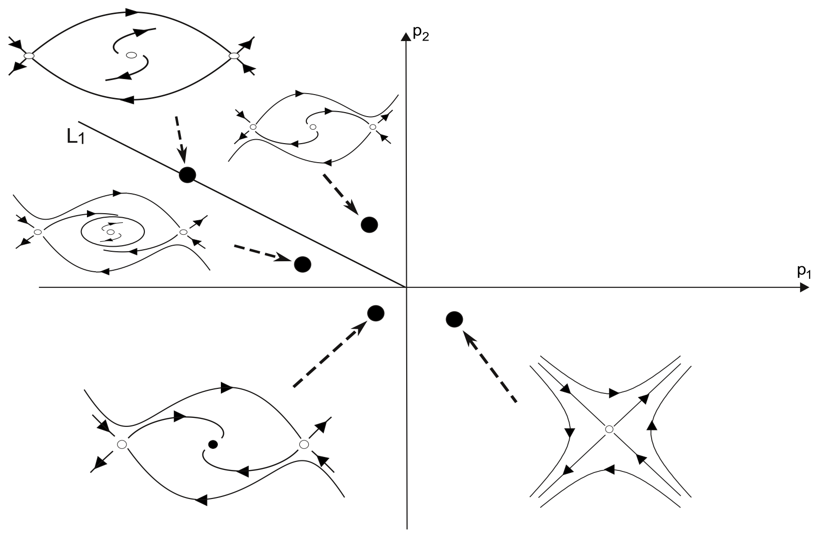
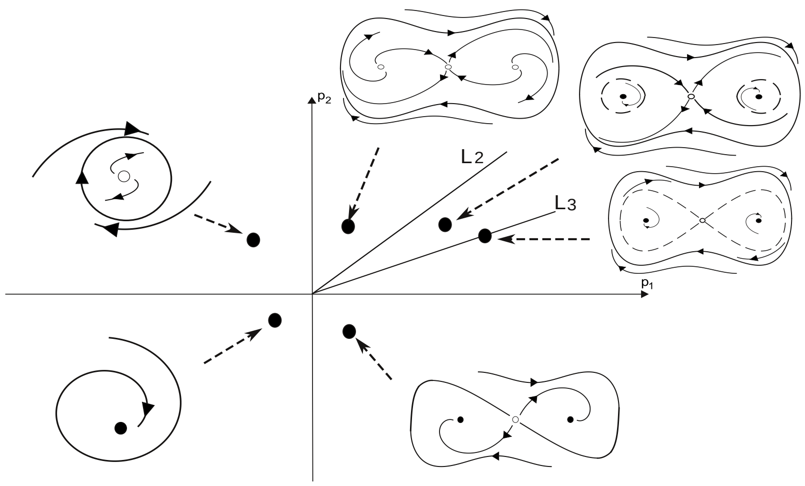


図 3: $\varsigma > 0$ のときの (5.10) の分岐図．直線 $\{(p_1, p_2)\,;\, p_1 < 0, p_2 = 0\}$ 上でホップ分岐が，直線 $\{(p_1, p_2)\,;\, p_1 = 0\}$ 上で定常分岐が，曲線 $L_1 := \{(p_1, p_2)\,;\, p_2 = -\epsilon\, p_1/5 + O((\epsilon p_1)^2)\}$ 上でヘテロクリニック分岐が起こる．



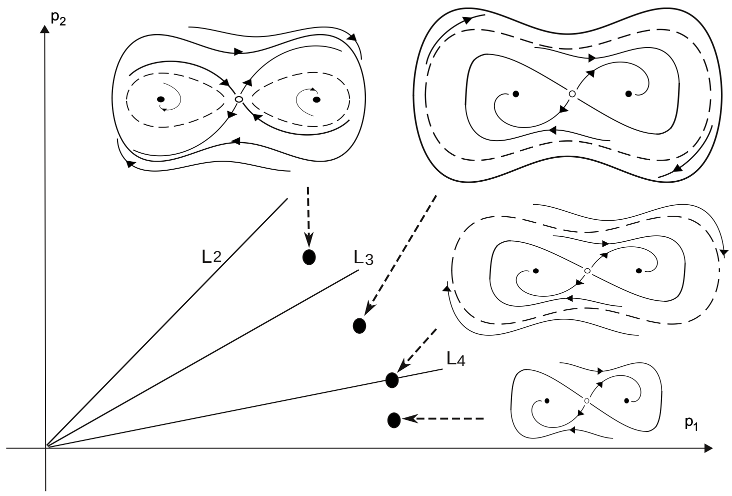


図 4: $\varsigma < 0$ のときの (5.10) の分岐図．ホップ分岐点の集合と定常分岐点の集合は図 3 と同じである．特徴的な分岐として，直線 $L_2 := \{(p_1, p_2)\,;\, p_2 = \epsilon\, p_1\}$ 上でホップ分岐が起こり，曲線 $L_3 := \{(p_1, p_2)\,;\, p_2 = 4\epsilon\, p_1/5 + O(p_1^2)\}$ 上でホモクリニック分岐が起こる．さらに，p_1 軸と曲線 L_3 の間に，別の分岐点の集合 $L_4 := \{(p_1, p_2)\,;\, p_2 \approx 0.752\epsilon\, p_1\}$ がある．L_3 と L_4 の間では，２重周期解が分岐する．

5.3 Hopf 分岐

ここでは，(5.10) の時間周期解の分岐について調べましょう．

$$p_2 = 0$$

のとき，(5.10) の 自明な平衡点 $(0,0)$ の周りの線形化固有値は

$$\pm\sqrt{p_1}$$

です．従って，$p_1 < 0$ において純虚数固有値が現れます．このようにパラメータの変化とともに純虚数固有値が現れる場合の分岐について考えましょう．

5.3.1 標準形

ここは [8] に従って,（(5.10) を調べるのに十分な範囲で）標準形変換の概要を説明します．一般に次の形の微分方程式系を考えましょう：

$$\dot{X} = AX + F(X), \quad X =^t (x,y) \in \mathbb{R}$$

ここで，A は 2×2 行列でその固有値は

$$\lambda = \alpha + i\omega, \quad \omega > 0.$$

と $\bar{\lambda}$ で与えられるものとします．$q = (q_1, q_2) \in \mathbb{C}^2$ を λ に対応する A の固有ベクトルとし，$p = (p_1, p_2) \in \mathbb{C}^2$ を $\bar{\lambda}$ に対応する A の転置行列 ${}^tA$ の固有ベクトルで

$$< p, q >:= \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 = 1$$

と正規化されているものとします．新しい変数 $z(t) \in \mathbb{C}$ を

$$z =< p, (x,y) > .$$

で導入します．変数 (x,y) は

$$(x,y) = zq + \bar{z}\bar{q}.$$

で与えられます．この変数変換によって，(5.11) は

$$\dot{z} = \lambda z + < p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) >, \quad z \in \mathbb{C}$$

と変換されます．

$$g(z, \bar{z}) = < p, F(zq + \bar{z}\bar{q}) >$$

とし，$g_{k\ell}$ を g のテイラー展開の係数とします；

$$g(z, \bar{z}) = \sum_{k+\ell \geq 2} \frac{1}{k!\ell!} g_{k\ell} z^k \bar{z}^\ell \tag{5.11}$$

目標は g を出来る限り簡単な形に変形することです．

まずは，２次の非線形項：g_{20}, g_{11}, g_{02} が消去できることを示します．z を

$$z = w + \frac{h_{20}}{2} w^2 + h_{11} w\bar{w} + \frac{h_{02}}{2} \bar{w}^2$$

と変換します．新しい変数 $w(t) \in \mathbb{C}$ はその逆変換によって

$$w = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z\bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3)$$

と表されます．従って，

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{z} - h_{20} z\dot{z} - h_{11}(\dot{z}\bar{z} - z\dot{\bar{z}}) - h_{02}\bar{z}\dot{\bar{z}} + \cdots \\ &= \lambda w + \frac{(g_{20} - \lambda h_{20}) w^2}{2} + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) w\bar{w} \\ &\quad + \frac{(g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda) h_{02}) \bar{w}^2}{2} + O(|w|^3) \end{aligned}$$

となります．したがって，

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$$

ととれば，２次の項をすべて消去できることが分かります．

次に，(上の変換で２次の項をすべて消去した後の）方程式

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{k+\ell \geq 3} \frac{1}{k!\ell!} g_{k\ell} z^k \bar{z}^\ell$$

を考えましょう．この式の $g_{k\ell}$ は２次の項の消去に必要な変換によって，元のテイラー展開の係数とは異なっていることに注意が必要です．前と同じように，

$$z = w + \frac{h_{30}}{6}w^3 + \frac{h_{21}}{2}w^2\bar{w} + \frac{h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{w}^3$$

なる変数変換を考えます．やはり逆変換は

$$w = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4)$$

で与えられます．t で微分すると

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2}z^2\dot{z} - \frac{h_{21}}{2}(2z\bar{z}\dot{z} + z^2\dot{\bar{z}}) \\
&\quad -\frac{h_{12}}{2}(\dot{z}\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2\dot{\bar{z}} \\
&= \lambda w + \frac{g_{30} - 2\lambda h_{30}}{6}w^3 + \frac{g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda})h_{21}}{2}w^2\bar{w} \\
&\quad + \frac{g_{12} - 2\bar{\lambda}h_{12}}{2}w\bar{w}^2 + \frac{g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda})h_{03}}{6}\bar{w}^3 + O(|w|^4)
\end{aligned}$$

よって

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda}$$

と選んで，幾つかの項を消去できます．$\alpha = 0$ で $\lambda + \bar{\lambda} = 0$ より，消去できないのは

$$g_{21}z^2\bar{z}$$

の項です．したがって，２度の変数変換を経て (5.11) は

$$\dot{z} = \lambda z + c_1|z|z \tag{5.12}$$

の形に変形できることが分かりました．ここで c_1 は (5.11) の $g_{k\ell}$ を用いて

$$c_1 = \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}$$

で与えられます．

さらに，何回かの変数変換とスケーリングを経て，次の定理が得られます；

定理 (5.11) は，可逆な座標変換とパラメータの変換，時間変数の変換によって

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + d(y_1^2 + y_2^2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(|(y_1, y_2)|^4) \tag{5.13}$$

に変換できる．ここで，d は

$$\text{sign}\ (\text{Re}\, c_1) = \frac{1}{\omega^2}\text{Re}\,(ig_{20}g_{11} + \omega g_{21})$$

である．

証明は [8] を参照のこと．

さて，(5.13) において，

$$y_1(t) = r(t)\cos\theta(t), \quad y_2(t) = r(t)\sin\theta(t)$$

と変数変換すると

$$\dot{r} = (\beta + dr^2)r, \quad \dot{\theta} = 1$$

を得ます．従って，時間周期解

$$r(t) = \sqrt{-\beta/d}, \quad \theta = t$$

が $\beta d < 0$ となる d において存在することが分かります．また，その周期解は $d > 0$ ならば不安定であり，$d < 0$ ならば漸近安定です．このような時間周期解の分岐を ホップ分岐（*Hopf bifurcation*)，あるいは，ポアンカレ-アンドロノフ-ホップ分岐（*Poincaré-Andronov-Hopf bifurcation* ）と呼びます．

5.3.2 Hopf 分岐の標準形の計算

さて，実際に (5.10) :

$$\begin{cases} \dot{u} = w, \\ \dot{w} = p_1 u + p_2 w + \varsigma u^3 - \epsilon\, u^2 w, \end{cases} \tag{5.14}$$

の $p_2 = 0$, $p_1 < 0$ でおこるホップ分岐を計算してみましょう．

まず，線形化行列の固有値

$$\sqrt{-p_1} i$$

に対応する固有ベクトルを

$$\frac{1}{2}\,{}^t(-i/\sqrt{-p_1}, 1),$$

線形化行列の転置行列の固有値

$$-\sqrt{-p_1} i$$

に対応する固有ベクトルを

$${}^t(-i\sqrt{-p_1}, 1)$$

ととります．これは，

$$<\ {}^t(-i\sqrt{-p_1}, 1), \frac{1}{2}\,{}^t(-i/\sqrt{-p_1}, 1) >= 1$$

を満たします．次に，

$$z =< (u, w), (-i\sqrt{-p_1}, 1) >= -i\sqrt{-p_1} u + w,$$

すなわち，

$$(u, w) = \left(\frac{i}{2\sqrt{-p_1}} (z - \bar{z}), \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \right)$$

とします．

$$g(z, \bar{z}) :=< (-i\sqrt{-p_1}, 1), (0, \varsigma u^3 - \epsilon\, u^2 w) >$$

に代入すると

$$g := \frac{1}{8p_1}\left[\left(\frac{i\varsigma}{\sqrt{-p_1}} - \epsilon\right) z - \left(\frac{i\varsigma}{\sqrt{-p_1}} + \epsilon\right)\bar{z}\right](z - z\bar{z})^2$$

を得ます．したがって，$z^2\bar{z}$ にかかる係数は

$$c_1 := \frac{-p_1}{4}\left(\frac{i\varsigma}{\sqrt{-p_1}} - \epsilon\right)$$

であり，$p_1 < 0, \epsilon > 0$ なので

$$\mathrm{Re}\, c_1 = p_1\epsilon/4 < 0.$$

したがって，$p_1 = 0$ で（(5.10) の定める力学系で）局所漸近安定な周期解が平衡点 $(0, 0)$ から分岐することが分かります．

6　メルニコフの方法

この節では (5.10) :

$$\begin{cases} \dot{u} = w, \\ \dot{w} = p_1 u + p_2 w + \varsigma u^3 - \epsilon\, u^2 w, \end{cases} \tag{6.1}$$

がホモクリニック軌道を持つことを，メルニコフの方法によって示します．メルニコフの方法については，[3] の 4.5 節，[9] の 28 章, [19] の 5.7 節などに解説があります．[1] の 4 章でも (5.10) の解析において同様の方法が用いられています．

6.1　メルニコフの方法

一般に微分方程式系

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{6.2}$$

を考えます．g は一般に時間周期的な摂動： $g(x, t) = g(x, t + T)$ でも良いのですが，ここでは簡単のため t には陽に依存しないものとします ((5.10) の解析のためには十分です）．

仮定として

- $\epsilon = 0$ において (6.2) はハミルトニアン $H(x)$ をもつ．すなわち，
$$f(x) = {}^t(f_1(x,y), f_2(x,y)) = {}^t\left(\frac{\partial H}{\partial y}(x,y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\right).$$
- $\varepsilon = 0$ のとき，(6.2) は平衡解 $p_0 = (0,0)$ とそれ自身をつなぐホモクリニック軌道 $q^0(t)$;
$$\lim_{t\to-\infty} q^0(t) = p_0, \quad \lim_{t\to+\infty} q^0(t) = p_0$$
をもつ．
- Γ_0 を
$$\Gamma_0 := \{q_0(t)\,;\, t \in \mathbb{R}\} \cup \{p_0\}$$
で定義する．Γ_0 の内部は $\alpha \to 0$ で Γ_0 に収束する周期軌道の族 $q^\alpha, \alpha \in (-1,0)$ で満たされている．さらに，$\alpha \to 0$ のとき，q^α の周期は単調に ∞ となる．
- q_0 は $t \to -\infty$ で p_0 に限りなく近づき，$t = t_0$ で x 軸にぶつかる．

以上の仮定のもとで，$\epsilon \neq 0$ としたときにホモクリニック軌道が存在するための条件を導きます．

$\epsilon = 0$ のときのホモクリニック軌道を改めて
$$q^0(t - t_0)$$
と表します（$q^0(0) \in \{(x,y)\,;\, y = 0\}$ となります）．(6.2) の 安定多様体と不安定多様体をそれぞれ
$$q_\varepsilon^s(t,t_0), q_\varepsilon^u(t,t_0)$$
とします．ϵ について展開し，ϵ の 1 次のオーダーまでとって
$$q_\varepsilon^s(t,t_0) = q^0(t-t_0) + \varepsilon q_1^s(t,t_0), \quad t \in [t_0, \infty),$$
$$q_\varepsilon^u(t,t_0) = q^0(t-t_0) + \varepsilon q_1^u(t,t_0), \quad t \in (-\infty, t_0]$$

と近似します．これを (6.2) に代入すると

$$f(q^0+\varepsilon q_1^s)=f(q^0)+\varepsilon Df(q^0)q_1^s+O(\varepsilon^2),$$
$$f(q^0+\varepsilon q_1^u)=f(q^0)+\varepsilon Df(q^0)q_1^u+O(\varepsilon^2)$$

より

$$\dot{q}_1^s=Df(q^0(t-t_0))q_1^s(t,t_0)+g(q^0(t-t_0)),$$
$$\dot{q}_1^u=Df(q^0(t-t_0))q_1^u(t,t_0)+g(q^0(t-t_0)) \tag{6.3}$$

を得ます．調べたいのは，q_ε^s と q_ε^u が交わるかどうかです．p_0 の安定多様体と不安定多様体が交差することを示すことが出来れば，それは $\epsilon\neq 0$ のとき，(6.2) がホモクリニック軌道をもつことに他なりません．

$$(\dot{x},\dot{y})(t_0)=f(q^0(0))$$

より，$f(q^0)$ は軌道 $(x(t),y(t))=q^0(t-t_0)$ の $t=t_0$ における接ベクトルを与えます．それとは直行する方向の方向ベクトルを $f^\perp(q^0(0))$ とかき，

$$V=span\{f^\perp(q^0(0))\}$$

とします．V 上での $q_\varepsilon^s(t_0):=q_\varepsilon^s(t_0,t_0)$ と $q_\varepsilon^s(t_0):=q_\varepsilon^s(t_0,t_0)$ との距離 $d(t_0)$ は

$$\begin{aligned} d(t_0) &= \varepsilon\frac{f^\perp(q^0(0))\cdot(q_1^u(t_0)-q_1^s(t_0))}{\|f^\perp(q^0(0))\|} \\ &= \varepsilon\frac{f(q^0(0))\times(q_1^u(t_0)-q_1^s(t_0))}{\|f(q^0(0))\|} \end{aligned}$$

となります．ここで，$\times$ は２次元ベクトル ${}^t(a,b),{}^t(c,d)$ に対して

$${}^t(a,b)\times{}^t(c,d)=ad-bc$$

で定義される演算です．

$$M(t_0)=f(q^0(0))\times(q_1^u(t_0)-q_1^s(t_0))$$

とおきます．

定理
$M(t_0)$ が ε に依存せずに単純な 0 点をもつならば，ある正数 ε_0 が存在して $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ なる ε に対して平衡点 p_0 の安定多様体と不安定多様体は横断的に交わる（(6.2) はホモクリニック軌道をもつ）．もし $M(t_0)$ が 0 点を持たなければ，平衡点 p_0 の安定多様体と不安定多様体は交わらない．

証明は [3], [9] などを参照のこと．

さて，もう少し計算を続けましょう．

$$\begin{aligned}
\varDelta(t,t_0) &:= f(q^0(t-t_0)) \times (q_1^u(t,t_0) - q_1^s(t,t_0)) \\
&= f(q^0(t-t_0)) \times q_1^u(t,t_0) - f(q^0(t-t_0)) \times q_1^s(t,t_0)
\end{aligned}$$

とし，

$$\varDelta^u(t,t_0) := f(q^0(t-t_0)) \times q_1^u(t,t_0),$$
$$\varDelta^s(t,t_0) := f(q^0(t-t_0)) \times q_1^s(t,t_0)$$

とおきます．$\varDelta^s(t,t_0)$ を t で微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d\varDelta^s}{dt}(t,t_0) &= Df(q^0(t-t_0))\,\dot{q}^0(t-t_0) \times q_1^s(t,t_0) \\
&\quad + f(q^0(t-t_0)) \times \dot{q}_1^s(t,t_0)
\end{aligned}$$

を得ます．いま，$q^0(t-t_0)$ は $\varepsilon = 0$ にのときの (6.2) の解だから

$$\dot{q}^0(t-t_0) = f(q^0(t-t_0)).$$

これと (6.3) より，

$$\begin{aligned}
\frac{d\varDelta^s}{dt}(t,t_0) &= Df(q^0(t-t_0))\,f(q^0(t-t_0)) \times q_1^s(t,t_0) \\
&\quad + f(q^0(t-t_0)) \times (Df(q^0(t-t_0))q_1^s(t,t_0) + g(q^0(t-t_0)).
\end{aligned}$$

ここで，成分ごとに計算して

$$
\begin{aligned}
&Df(q^0(t-t_0)\,f(q^0(t-t_0))\times q_1^s(t,t_0)\\
&\qquad +f(q^0(t-t_0))\times Df(q^0(t-t_0))q_1^s(t,t_0)\\
&=\mathrm{tr}\,(Df(q^0))f(q^0(t-t_0))\times q_1^s(t,t_0)\\
&=\mathrm{tr}\,(Df(q^0))\mathit{\Delta}^s(t,t_0)
\end{aligned}
$$

が確かめられます．よって，

$$
\frac{d\mathit{\Delta}^s}{dt}(t,t_0)=\mathrm{tr}\,(Df(q^0))\mathit{\Delta}^s(t,t_0)+f(q^0(t-t_0))\times g((q^0(t-t_0),t).
$$

ですが，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,(Df(q^0)) &= (f_1)_x(q_0)+(f_1)_y(q_0)\\
&= \frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}=0
\end{aligned}
$$

より，

$$
\frac{d\mathit{\Delta}^s}{dt}(t,t_0)=f(q^0(t-t_0))\times g(q^0(t-t_0)).
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{\infty}\frac{d\mathit{\Delta}^s}{dt}(t,t_0)\,dt &= \lim_{t\to\infty}\mathit{\Delta}^s(t,t_0)-\mathit{\Delta}^s(t_0,t_0)\\
&= \lim_{t\to\infty}\left[f(q^0(t))\times q_1^s(t,t_0)\right]-\mathit{\Delta}^s(t_0,t_0)\\
&= f(p_0)\times p_0-\mathit{\Delta}^s(t_0,t_0)\\
&= 0\times p_0-\mathit{\Delta}^s(t_0,t_0)\\
&= -\mathit{\Delta}^s(t_0,t_0)
\end{aligned}
$$

より，

$$
-\mathit{\Delta}^s(t_0,t_0)=\int_{t_0}^{\infty}f(q^0(t-t_0))\times g(q^0(t-t_0))\,dt.
$$

同様に，

$$
\mathit{\Delta}^u(t_0,t_0)=\int_{-\infty}^{t_0}f(q^0(t-t_0))\times g(q^0(t-t_0))\,dt.
$$

従って，

$$
\begin{aligned}
M(t_0) &= \mathit{\Delta}(t_0, t_0) \\
&= \mathit{\Delta}^u(t_0, t_0) - \mathit{\Delta}^s(t_0, t_0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(q^0(t-t_0)) \times g(q^0(t-t_0))\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(q^0(t)) \times g(q^0(t))\, dt
\end{aligned}
$$

を得ます．

6.2 具体例

6.2.1 ホモクリニック軌道

(5.10) において，$\varsigma = -1$ のとき，

$$
\begin{cases}
\dot{u} = w, \\
\dot{w} = p_1 u + p_2 w + \varsigma u^3 - \epsilon\, u^2 w,
\end{cases}
\tag{6.4}
$$

のホモクリニック軌道を求めてみましょう．$\varsigma = -1$, $(p_2, \epsilon) = (0, 0)$ のとき，(5.10) のハミルトニアンは

$$
H(u, w) = \frac{w^2}{2} - p_1 \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}
$$

です．メルニコフ積分 $M(t_0)$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} (w, p_1 u - u^3) \times (0, p_2 w - \epsilon u^2 w)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (p_2 w^2 - \epsilon u^2 w^2)\, dt
\end{aligned}
$$

より，

$$p_2 = \epsilon \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u^2 w^2 \, dt}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} w^2 \, dt}.$$

ここで，$(p_2, \epsilon) = (0, 0)$ のときのホモクリニック軌道は (曲線 $\{(u, w)\ ;\ H(u, w) = 0\}$ 上より)

$$w = \pm\sqrt{p_1 u^2 - \frac{u^4}{2}}$$

で与えられます．すなわち $u > 0$ の範囲において，

- $(0, 0)$ の不安定多様体上の軌道は，曲線

  $$w = \sqrt{p_1 u^2 - \frac{u^4}{2}}$$

  上であって，$t \to -\infty$ で原点に近づき，$t = t_0$ で $(\sqrt{2p_1}, 0)$ にぶつかる．

- $(0, 0)$ の安定多様体上の軌道は，曲線

  $$w = -\sqrt{p_1 u^2 - \frac{u^4}{2}}$$

  上であって，$t = t_0$ で $(\sqrt{2p_1}, 0)$ を出発して $t \to \infty$ で原点に向かう．

ことが分かります．

また，

$$\frac{du}{dt} = w$$

より，$M(t_0)=0$ ならば

$$
\begin{aligned}
p_2 &= \epsilon \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u^2 w^2\,du}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} w^2\,du} = \epsilon \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u^2 w\,du}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} w\,du} \\
&= \epsilon \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{t_0} u^2 w\,du + \int_{t_0}^{\infty} u^2 w\,du}{\displaystyle\int_{-\infty}^{t_0} w\,du + \int_{t_0}^{\infty} w\,du} \\
&= \epsilon \frac{\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2p_1}} u^2 \sqrt{p_1 u^2 - \frac{u^4}{2}}\,du + \int_{\sqrt{2p_1}}^{0} u^2 \left(-\sqrt{p_1 u^2 - \frac{u^4}{2}}\right) du}{\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2p_1}} \sqrt{p_1 u^2 - \frac{u^4}{2}}\,du + \int_{\sqrt{2p_1}}^{0} \left(-\sqrt{p_1 u^2 - \frac{u^4}{2}}\right) du} \\
&= \epsilon \frac{\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2p_1}} u^2 \sqrt{p_1 u^2 - \frac{u^4}{2}}\,du}{\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2p_1}} \sqrt{p_1 u^2 - \frac{u^4}{2}}\,du} \\
&= \frac{4}{5}\,\epsilon\, p_1, \quad (p_1 > 0).
\end{aligned}
$$

よって，

$$
p_2 = \frac{4}{5}\,\epsilon\, p_1, \quad p_1 > 0
$$

において，$M(t_0)=0$ となり，原点の安定多様体と不安定多様体が横断的に交わることが分かります．

6.2.2 ヘテロクリニック軌道

メルニコフの方法によって，ヘテロクリニック軌道や周期解を求めることもできます．ここでは実際に $\varsigma = +1$ のとき，(5.10) :

$$
\begin{cases}
\dot{u} = w, \\
\dot{w} = p_1 u + p_2 w + u^3 - \epsilon\, u^2 w,
\end{cases}
$$

のヘテロクリニック軌道を求めてみましょう．

$\varsigma = 1$, $(p_2, \epsilon) = (0, 0)$ のとき，(5.10) のハミルトニアンは

$$H(u, w) = \frac{w^2}{2} - p_1 \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4}$$

です．$(p_2, \epsilon) = (0, 0)$ のとき，(5.10) のヘテロクリニック軌道は $u > 0$ の範囲において，

- $(-\sqrt{-p_1}, 0)$ の不安定多様体上の軌道は，曲線 $H = p_1^2/4$ 上 すなわち，
$$w = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^2 + p_1), \quad u > 0$$
上であって，$t \to -\infty$ で $(-\sqrt{-p_1}, 0)$ に近づき，$t = t_0$ で w 軸にぶつかる．

- $(\sqrt{-p_1}, 0)$ の安定多様体上の軌道は，曲線 $H = p_1^2/4$ 上すなわち，
$$w = \frac{1}{\sqrt{2}}(u^2 + p_1), \quad u > 0$$
上であって，$t = t_0$ で w 軸上にあって $t \to +\infty$ で $(\sqrt{-p_1}, 0)$ に近づく．

ことがわかります．

メルニコフ積分 $M(t_0)$ を計算すると

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} (w, p_1 u + u^3) \times (0, p_2 w - \epsilon u^2 w)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (p_2 w^2 - \epsilon u^2 w^2)\, dt \\ &= \int_{-\sqrt{-p_1}}^{\sqrt{-p_1}} p_2 w - \epsilon\, u^2 w du \end{aligned}$$

より，

$$p_2 = \epsilon \frac{\displaystyle\int_{-\sqrt{-p_1}}^{\sqrt{-p_1}} u^2(u^2 + p_1)\, du}{\displaystyle\int_{-\sqrt{-p_1}}^{\sqrt{-p_1}} (u^2 + p_1)\, du} = -\epsilon \frac{1}{5} p_1, \quad (p_1 < 0).$$

において，$M(t_0)=0$ となり，$(-\sqrt{-p_1},0)$ の不安定多様体と $(\sqrt{-p_1},0)$ の安定多様体が横断的に交わることが分かります．

最後に注意として，周期解（例えば $\varsigma=-1$ においてすべての平衡解を囲む２重周期解の存在）についても同様にメルニコフ積分の性質を使って示すことが出来ます．その詳細については [1] を参照してください．

謝辞

本稿を公開するにあたり，池田幸太先生（明治大学先端数理科学研究科）に事前に精読いただき，内容および校正について有益な助言を頂きました．また，坂元美咲氏には誤植および文章表現の校正についてお世話になりました．本稿は２０１４年１２月１１日から１３日にかけて神戸大学にて開催されました応用数学勉強会のために準備したものです．講演の機会をいただきました石渡哲也先生（芝浦工業大学），高坂良史先生（神戸大学）には大変お世話になりました．最後に，勉強会の場におきまして有意義な質疑およびご助言をいただきました．勉強会に参加いただきましたすべての方に感謝いたします．

7　付録：サドルノード分岐の標準形について

ここでは，サドルノード分岐の標準形について [8] による証明を与える．

補題

微分方程式

$$\dot{x}=\alpha+x^2+O(x^3)$$

の定める力学系は

$$\dot{x}=\alpha+x^2 \tag{7.1}$$

の定める力学系と局所位相同値である．

証明

次の微分方程式を考える：

$$\begin{aligned} \dot{y} &= F(y,\alpha) := \alpha + y^2 + \psi(y,\alpha), \\ \psi(y,\alpha) &= O(y^3). \end{aligned} \tag{7.2}$$

(7.2) の (y,α) 平面における分岐曲線を M とする：

$$M := \{(y,\alpha)\,;\, F(y,\alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y,\alpha) = 0\}$$

$$F(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}(0,0) = 1 \neq 0$$

であるから，陰関数の定理より $(0,0)$ の近傍 $\mathcal{U}$ において定義され，$g(0) = 0$, $F(y,g(y)) = 0$ を満たす陰関数の枝 $\alpha = g(y)$ が存在する．よって $(y,\alpha) \in \mathcal{U}$ である限り

$$M = \{(y,\alpha)\,;\, \alpha = g(y)\}.$$

$g(y)$ の $y=0$ での展開を得るために

$$F(y,g(y)) = 0$$

の両辺を y で微分して

$$\frac{d}{dy}\left(F(y,g(y))\right) = \frac{\partial F}{\partial y}(y,g(y)) + \frac{\partial F}{\partial \alpha}(y,g(y)) \cdot \frac{dg}{dy}(y) = 0$$

$y=0$ とすると ($g(0)=0$ であるから)

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}(0,0) = 1$$

より，

$$\frac{dg}{dy}(0) = 0$$

を得る．さらに $F(y,g(y))$ の両辺を y で２回微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dy^2}\left(F(y,g(y))\right) &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(y,g(y)) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \alpha}(y,g(y)) \cdot \frac{dg}{dy}(y) \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial \alpha}(y,g(y)) \cdot \frac{d^2 g}{dy^2}(y) = 0.\end{aligned}$$

$y = 0$ とすると

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,0) = 2, \quad \frac{dg}{dy}(0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha}(0,0) = 1$$

より

$$\frac{d^2 g}{dy^2}(0) = -2.$$

よって，M は $(y,\alpha) = (0,0)$ の近傍において

$$M = \{(y,\alpha)\,;\, \alpha = g(y) = -y^2 + O(y^3)\}$$

と表される．

$$G(y,\alpha) = \alpha - y^2 = +O(y^3)$$

とし，

$$y = a_1(\pm\sqrt{-\alpha}) + a_2(\pm\sqrt{-\alpha})^2 + a_3(\pm\sqrt{-\alpha})^3 + \cdots$$

を $G(y,\alpha)$ に代入して 未知定数 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ を定めることにより，$G(y,\alpha) = 0$ の解 $y_1(\alpha), y_2(\alpha)$ は

$$y_1(\alpha) := \sqrt{-\alpha} + O(\alpha), \quad y_2(\alpha) = -\sqrt{-\alpha} + O(\alpha)$$

と表示できる．

(7.1) の平衡解を

$$x_1(\alpha) = \sqrt{-\alpha}, \quad x_2(\alpha) = -\sqrt{-\alpha}$$

とおく．$|\alpha| \ll 1$ なる α に対して，写像 $h_\alpha(x)$ を

$$h_\alpha(x) = \begin{cases} x & \alpha \geq 0 \\ a(\alpha) + b(\alpha)x & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}a(\alpha) &:= (y_1(\alpha) + y_2(\alpha))/2, \\ b(\alpha) &:= (y_1(\alpha) - y_2(\alpha))/(2\sqrt{-\alpha}).\end{aligned}$$

と定めると h_α は

$$h_\alpha(x_j(\alpha)) = y_j(\alpha), \quad j = 1, 2$$

を満たす．また，

$$\lim_{\alpha \to -0} h_\alpha(x) = x.$$

よって，h_α は (7.1) の平衡解を (7.2) の平衡解にうつす同相写像である．さらに，h_a は (7.1) の力学系をその軌道の方向を保ったまま，(7.2) の力学系にうつす同相写像である．

$\square$

定理

$f(x, \alpha)$（$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$）を十分滑らかな関数で以下を満たすとする：

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & f(0,0) = 0, & \text{(ii)} & f_x(0,0) = 0, \\ \text{(iii)} & f_{xx}(0,0) \neq 0, & \text{(iv)} & f_\alpha(0,0) \neq 0. \end{array}$$

このとき，微分方程式

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{7.3}$$

の定める力学系は

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2, \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

の（$\pm$ のいずれかをとったものの）定める力学系と局所位相同値である．

証明

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3)$$

と展開する．$\xi = x + \delta$ とすると

$$\dot{\xi} = \dot{x} = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)(\xi - \delta) + f_2(\alpha)(\xi - \delta)^2 + \cdots$$

整理して

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi} &= [f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3)] \\
&\quad +[f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi \\
&\quad +[f_2(\alpha) + O(\delta)]\xi^2 \\
&\quad +O(\xi)^3.
\end{aligned}
$$

ここで，(iii) より

$$f_2(0) = \frac{1}{2} f_{xx}(0,0) \neq 0.$$

よって，

$$F(\alpha, \delta) := f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)$$

とすると

$$F(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \delta}(0,0) = 2f_2(0) \neq 0$$

であるから $|\alpha| \ll 1$ を満たす α に対して

$$F(\alpha, \delta(\alpha)) = 0, \quad \delta(0) = 0$$

を満たす陰関数 $g(\alpha, \delta) = 0$ の枝 $\delta = \delta(\alpha)$ が存在する．

$$F(\alpha, \delta(\alpha)) = 0$$

を微分して

$$\frac{d}{d\alpha}(F(\alpha, \delta(\alpha))) = \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, \delta(\alpha)) + \frac{\partial F}{\partial \delta}(\alpha, \delta(\alpha))\frac{d\delta}{d\alpha}(\alpha) = 0$$

$\alpha = 0$ とすると

$$\frac{df_1}{d\alpha}(0) + 2f_2(0) \cdot \frac{d\delta}{d\alpha}(0) = 0.$$

よって，$\delta(\alpha)$ は

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2f_2(0)} \frac{df_1}{d\alpha}(0)\alpha + O(\alpha^2)$$

なる展開をもつ．

$\delta = \delta(\alpha)$ と選ぶと ($f_j(\alpha)$ を α で展開して)

$$\dot{\xi} = [f_0'(0)\alpha + O(\alpha^2)] + [f_2(0) + O(\alpha)]\xi^2 + O(\xi^3) \qquad (7.4)$$

を得る（ここで $' = d/d\alpha$）．

新しいパラメータ $\mu(\alpha)$ を

$$\mu = f_0'(0)\alpha + O(\alpha^2)$$

で導入する．すると $\mu(0) = 0$ であって，さらに (iv) より，

$$\mu'(0) = f_0'(0) = f_\alpha(0,0) \neq 0.$$

よって

$$G(\mu,\alpha) = \mu - f_0'(0)\alpha + O(\alpha^2)$$

とすると

$$G(0,0) = 0, \quad G_\alpha(0,0) = -f_0'(0) \neq 0$$

であるから

$$\alpha(0) = 0, \quad G(\mu(\alpha),\alpha) = 0$$

を満たす陰関数の枝 $\alpha = \alpha(\mu)$ が存在する．$b(\mu) = f_2(0) + O(\alpha(\mu))$ とおくと再び (iii) より

$$b(0) = f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0,0) \neq 0.$$

従って新たなパラメータ μ によって (7.4) は

$$\dot{\xi} = \mu + b(\mu)\xi^2 + O(\xi^3)$$

となる．

$$\eta = |b(\mu)|\xi, \quad \beta = |b(\mu)|\mu$$

と変換すると

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= |b(\mu)|\dot{\xi} = |b(\mu)|\mu + \frac{b(\mu)}{|b(\mu)|}\eta^2 + O(\eta^3)\\ &= \beta\eta + \frac{b(\mu)}{|b(\mu)|}\eta^2 + O(\eta^3).\end{aligned}$$

ここで，

$$s = \mathrm{sign}\{b(\mu)\}$$

とおくと $|\mu| \ll 1$ である限り

$$s = \mathrm{sign}\{b(\mu)\} = \mathrm{sign}\{b(0)\} = \mathrm{sign}\{f_{xx}(0,0)\}.$$

よって

$$\dot{\eta} = \beta\eta + s\eta^2 + O(\eta^3), \quad s = \mathrm{sign}\{f_{xx}(0,0)\}.$$

ここまでの変数およびパラメータについての変換はすべて可逆かつ連続である．よって補題より，(7.3) の定める力学系は

$$\dot{\eta} = \beta \pm \eta^2$$

の定める力学系と局所位相同値である．

□

8 付録：中心不安定多様体とスペクトルギャップ条件

8.1 中心多様体の構成の具体例

ここでは，中心多様体の構成の具体例を考えます．$\mathbb{R}^3$ を相空間とする微分方程式系

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = 0, \\ \dot{y} = -y + g(x_1, x_2) \end{cases} \tag{8.1}$$

を考えます（この例は [1] からとったものです）．ここで，$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は C^2-関数であって

$$g(0,0) = 0, \quad g(x_1, x_2) = O(x_1^2 + x_2^2)$$

を満たすものとします．(8.1) の中心多様体を構成しましょう．

$$\chi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

を C^∞ 関数であって

$$\chi(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & (x_1^2 + x_2^2 \le \varepsilon^2), \\ 0 & (x_1^2 + x_2^2 \ge (2\varepsilon)^2) \end{cases}$$

を満たすものとします．

$$G(x_1, x_2) = \chi(x_1, x_2) g(x_1, x_2)$$

とおき，十分小さい ε に対して微分方程式系

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = 0, \\ \dot{y} = -y + G(x_1, x_2), \end{cases} \tag{8.2}$$

の不変多様体を構成します．これは，もとの方程式系 (8.1) の $\|(x_1, x_2)\| < \varepsilon$ において定義された中心多様体となります．

(8.2) の始めの 2 つの微分方程式系の解は

$$x_1(t) = z_1 + z_2 t, \quad x_2 = z_2, \quad z_j = x_j(0) \tag{8.3}$$

です．

h を (8.2) の中心多様体とします．$y(t) = h(x_1(t), x_2(t))$ と表されるので，$h(x_1(t), x_2(t))$ は

$$\frac{d}{dt} h(x_1(t), x_2(t)) = -h(x_1(t), x_2(t)) + G(x_1(t), x_2(t)) \tag{8.4}$$

を満たします．さらに，h は (x_1, x_2)-平面に原点で接してなければならいので，e^{-t} の成分（$t \to \infty$ のとき，安定多様体に沿って原点に近づく成分）を持たないように h を構成する必要があります．このために，条件

$$\lim_{t \to -\infty} h(x_1(t), x_2(t)) e^t = 0$$

のもとで，(8.4) の解 $h(x_1(t), x_2(t))$ を構成します．(8.2) の第３式の両辺を t について $-\infty$ から 0 まで積分し，(8.3) を用いると

$$h(z_1, z_2) = \int_{-\infty}^{0} e^s G(z_1 + z_2 s, z_2) ds \tag{8.5}$$

を得ます．これは (8.2) の不変な多様体です．実際，

$$(x_1(0), x_2(0), y(0)) = (z_1, z_2, h(z_1, z_2))$$

を初期値とする (8.2) の解を考えると

$$\begin{aligned} y(t) &= h(z_1, z_2) e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} G(z_1 + z_2 s, z_2) ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} e^{s-t} G(z_1 + z_2 s, z_2) ds \end{aligned}$$

となります．ここで，新たな変数 $\tilde{s}$ を

$$\tilde{s} = s - t$$

で導入し，さらに

$$x_j(s) = x_j(\tilde{s} + t) = \tilde{x}_j(\tilde{s}), \quad \tilde{z}_j = \tilde{x}_j(0), \quad j = 1, 2$$

とします．すると $\tilde{x}_j$ は

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}_1}{d\tilde{s}} = \tilde{x}_2, \\ \\ \dfrac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{s}} = 0 \end{cases} \tag{8.6}$$

の解だから

$$\tilde{x}_1(\tilde{s}) = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 \tilde{s}, \quad \tilde{x}_2(\tilde{s}) = \tilde{z}_2$$

となります．また，

$$z_j = x_j(0) = \tilde{x}_j(-t)$$

より，

$$z_1 = \tilde{x}_j(-t) = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2(-t), \quad z_2 = \tilde{x}_2(-t) = \tilde{z}_2$$

を得ます．したがって，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{t} e^{s-t} G(z_1 + z_2 s, z_2) ds \\
=& \int_{-\infty}^{0} e^{\tilde{s}} G(\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2(-t) + \tilde{z}_2(\tilde{s} + t), \tilde{z}_2) d\tilde{s} \\
=& \int_{-\infty}^{0} e^{\tilde{s}} G(\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 \tilde{s}, \tilde{z}_2) d\tilde{s} = h(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2).
\end{aligned}$$

これより，$h(x_1, x_2)$ は (8.2) の不変多様体（従って，(8.1) の中心多様体）であることが確かめられました．

この例では，中心多様体を所望の条件を満たすような特解として構成しました．もし関数 g が y にも依存するとすると積分 (8.5) は

$$h(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{0} e^{s} G(x_1(s), x_2(s), h(x_1(s), x_2(s))) ds \tag{8.7}$$

となります．このときには，積分方程式 (8.7) の解を適当な関数空間の不動点として求めることで中心多様体を構成します（詳細は [1] を参照）．

8.2 中心不安定多様体

中心多様体定理を適応して解の分岐を調べる際の問題を考えましょう．

$$\begin{cases}
\dot{\gamma^*} = 0, \\
\dot{x} = \gamma^* x + f(x, y), \\
\dot{y} = -\gamma y + g(x, y), \qquad (\gamma > 0,\ 1 \gg \gamma^* > 0)
\end{cases}$$

なる微分方程式系の中心多様体 $y = h(x)$ 上の縮約方程式

$$\dot{x} = \gamma^* x + f(x, h(y)), \quad 1 \gg \gamma^* > 0$$

を考えます．縮約原理によってこの方程式は元の方程式の解を近似していますが，その近似が有効な γ^* の範囲はどこまででしょうか．結果としては，$\gamma^* < \gamma$ ならば，十分小さい正数 ε が存在して $|x|, |y| < \varepsilon$ である限り，は局所吸引的な中心多様体が存在して縮約原理が成り立ちます．こ

の問題を考えるには，中心多様体定理の証明の方法について考える必要があります．

ここでは，第３章と同様に，バナッハ空間における中心多様体近似を考えます．また，証明の方法は [1] に従います．使用する記号は本稿の３章に従います．

X, Y をバナッハ空間とします．まずはじめに，この節において用いる記号を（第３章と同じですが）あらためて記します；

- X から Y への有界線形作用素の空間を $\mathcal{L}(X, Y)$ で定義する．これは，作用素ノルム
$$\|L\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\|u\|_X=1} \|Lu\|_Y$$
のもとでバナッハ空間となる（[10], ）．$X = Y$ のとき，$\mathcal{L}(X, X)$ を単に $\mathcal{L}(X)$ とかく．

- X から Y への k 回連続的微分可能な関数の空間を $\mathcal{C}^k(X, Y)$ とかく．$F : X \to Y,\ F \in \mathcal{C}^k(X, Y)$ に対して， そのノルムを
$$\|F\|_{\mathcal{C}^k} = \max_{j=0,\ldots k} \left(\sup_{x\in X} \|D^j F(x)\|_{\mathcal{L}(X^j,Y)} \right)$$
で定義する．$\mathcal{C}^k(X, Y)$ はこのノルムのもとでバナッハ空間である．

- 正定数 η に対して，関数空間 $\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R}, X)$ を
$$\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R}, X) := \left\{ u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, X)\,;\, \|u\|_{\mathcal{F}_\eta} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(e^{\eta t} \|u(t)\|_X \right) < \infty \right\}$$
で定義する．$\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R}, X)$ は $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_\eta}$ のもとでバナッハ空間である．

- 線形作用素 $L : X \to Y$ の像集合を $\operatorname{im} L$ とかく；
$$\operatorname{im} L := \{Lu \in Y\,;\, u \in X\} \subset Y.$$
また，L の核を $\ker L$ とかく；
$$\ker L := \{u \in X\,;\, Lu = 0\} \subset X.$$

- X から Y への連続な埋め込みが存在するとする．線形作用素 $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ のレゾルベント集合を $\rho(L)$ （または単に ρ）とかく;

$$\rho := \{\lambda \in \mathbb{C};\, \lambda\mathbb{I} - L : X \to Y \text{ is bijective}\}.$$

ここで $\mathbb{I}$ は恒等写像を表す．また，L のスペクトル集合を $\sigma(L)$（または単に σ）とかく；

$$\sigma := \mathbb{C} \setminus \rho\,.$$

次に，仮定を述べます．ここでの仮定は第 3 章と異なります（特にスペクトルに関する仮定に注意）．

仮定

X, Y, Z をバナッハ空間とし，X から Y への，Y から Z への自然な埋め込みが連続であるとします．Z における微分方程式

$$\frac{du}{dt} = Lu + N(u) \tag{8.8}$$

を考えましょう．

仮定 1　線形作用素 L と非線型部分 N は以下を満たす；

- $L \in \mathcal{L}(X, Z)$；
- 定数 $k \geq 2$ に対して，$0 \in X$ の近傍 V が存在して

$$N \in \mathcal{C}^k(V, Y)$$

であって，

$$N(0) = 0, \quad DN(0) = 0$$

を満たす．ここで，D はフレッシェ微分である．

$N(0)=0$ より，$u(t)\equiv 0$ が (8.8) の平衡解であることを注意しておきます．さて， L のスペクトル集合 σ を

$$\sigma=\sigma_+\cup\sigma_0\cup\sigma_-$$

と分けます．ここで，

$$\begin{aligned}\sigma_+&=\{\lambda\in\sigma;\mathrm{Re}\,\lambda>0\},\\ \sigma_0&=\{\lambda\in\sigma;\mathrm{Re}\,\lambda=0\},\\ \sigma_-&=\{\lambda\in\sigma;\mathrm{Re}\,\lambda<0\},\end{aligned}$$

です（$\mathrm{Re}\,\lambda$ は λ の実部を表す）．

仮定 2

- ある正数 γ, γ^* が存在して

  $$\sup_{\lambda\in\sigma_-}\mathrm{Re}\,\lambda<-\gamma,\quad 0<\inf_{\lambda\in\sigma_+}\mathrm{Re}\,\lambda,\quad \sup_{\lambda\in\sigma_+}\mathrm{Re}\,\lambda<\gamma^*$$

  が成り立つ．
- 集合 σ_0, σ_+ は重複度も込めて有限個の固有値からなる．
- $L\in\mathcal{L}(X,Z)$ は解析半群の生成素である（すなわち，$-L$ は角域作用素）．

やはり 3 章と同じように σ_0, σ_+ に対応する固有関数の張る固有空間への射影作用素を定義する必要があります．Γ を $\{\lambda;|\mathrm{Re}\,\lambda|<\gamma\}$ 上の反時計回りの方向を正の向きとする閉曲線であって σ_0 を囲むものとします．このとき，Dunford 積分 ([7], Section III. 4, [21]（上）, 1.3 節)

$$\mathbf{P}_0=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda\mathbb{I}-L)^{-1}d\lambda\in\mathcal{L}(Z,X)$$

によって射影作用素が定まります．$\mathbf{P}_0$ は

$$\mathbf{P}_0^2=\mathbf{P}_0,\quad \mathbf{P}_0Lu=L\mathbf{P}_0u\quad\text{for all } u\in X$$

を満たします．さらに，$\dim(\operatorname{im}\mathbf{P}_0)$ は有限です．

同様に，Γ_+ を $\{\lambda;\, |\mathrm{Re}\,\lambda| > 0\}$ 上の半時計回りの方向を正の向きとする閉曲線であって σ_+ を囲むものとし，

$$\mathbf{P}_+ = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_+}(\lambda\mathbb{I} - L)^{-1}d\lambda \in \mathcal{L}(Z, X)$$

によって射影作用素 $\mathbf{P}_+$ を定めます．

射影作用素 $\mathbf{P}_h$ を

$$\mathbf{P}_h = \mathbb{I} - (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_+)$$

で定義します．この $\mathbf{P}_h$ もやはり

$$\mathbf{P}_h^2 = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{P}_h L u = L\mathbf{P}_h u \quad \text{for all } u \in X$$

をみたし，$\mathbf{P}_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$ であり，さらに X から Y への，Y から Z への連続な埋め込みが存在するので，

$$\mathbf{P}_h \in \mathcal{L}(X) \cap \mathcal{L}(Y) \cap \mathcal{L}(Z)$$

が成り立ちます．

次に，

$$\mathcal{E}_0 = \operatorname{im}\mathbf{P}_0 \subset X, \quad \mathcal{E}_+ = \operatorname{im}\mathbf{P}_+ \subset X, \quad Z_h = \operatorname{im}\mathbf{P}_h \subset Z$$

として

$$Z = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_+ \oplus X_h$$

と直和に分解されます．

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_+$$

とします．L_0, L_+, L_h を それぞれ L の $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_+$, X_h への制限とします．

$u \in X$ に対して

$$\begin{aligned}
&u = u_0 + u_h + u_+, \\
&u_0 = \mathbf{P}_0 u \in \mathcal{E}_0, \quad u_+ = \mathbf{P}_+ u \in \mathcal{E}_+, \quad u_h = \mathbf{P}_h u \in Z_h,
\end{aligned}$$

と表現できます．さらに，

$$X_h = \mathbf{P}_h X, \quad Y_h = \mathbf{P}_h Y$$

とします．(8.8) は

$$\begin{aligned}\frac{du_0}{dt} &= L_0 u_0 + \mathbf{P}_0 N(u),\\ \frac{du_+}{dt} &= L_+ u_+ + \mathbf{P}_+ N(u),\\ \frac{du_h}{dt} &= L_h u_h + \mathbf{P}_h N(u)\end{aligned}$$

と書き直せます．次に，十分滑らかな *cut-off* 関数 $\chi : \mathcal{E}_* \to \mathbb{R}$, “$* = 0, +$” を

$$\chi(u_*) = \begin{cases} 1 & \text{for } \|u_*\| \leq 1 \\ 0 & \text{for } \|u_*\| \geq 2 \end{cases} \qquad \chi(u_*) \in [0,1] \text{ for all } u_* \in \mathcal{E}_*$$

とします．$\mathcal{E}$ は有限次元ですからこのような cut-off 関数は存在します．

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$$

に対して $\mathbf{P_0} N^\varepsilon(u)$, $\mathbf{P}_+ N^\varepsilon(u)$, $u = u_0 + u_+ + u_h$ を

$$\begin{aligned}N_0^\varepsilon(u_0 + u_+ + u_h) &= (\mathbf{P}_0 N)(u_0 \chi(u_0/\varepsilon) + u_+ \chi(u_+/\varepsilon) + u_h), \quad u_0 \in \mathcal{E}_0,\\ N_+^\varepsilon(u_0 + u_+ + u_h) &= (\mathbf{P}_+ N)(u_0 \chi(u_0/\varepsilon) + u_+ \chi(u_+/\varepsilon) + u_h), \quad u_+ \in \mathcal{E}_+,\end{aligned}$$

と定義します．

バナッハ空間 $Z = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_+ \oplus X_h$ における方程式系

$$\begin{aligned}\frac{du_0}{dt} &= L_0 u_0 + N_0^\varepsilon(u),\\ \frac{du_+}{dt} &= L_+ u_+ + N_+^\varepsilon(u),\\ \frac{du_h}{dt} &= L_h u_h + \mathbf{P}_h N(u)\end{aligned} \tag{8.9}$$

を考えます．L_0, L_+, L_h の生成する半群に対して以下の評価が成り立ちます；

$$\|e^{L_h t} w\|_X \leq C_3 e^{-\gamma t}\|w\|_X,\ {}^\forall w \in Z_h, {}^\forall t > 0,$$
$$\|e^{L_+ t} w\|_X \leq C_1 e^{\gamma^*|t|}\|w\|_X,\ {}^\forall w \in \mathcal{E}_+, {}^\forall t \in \mathbb{R},$$

$r > 0$ に対してある正数 $C_2(r)$ が存在して

$$\|e^{L_0 t} w\|_X \leq C_2(r) e^{r|t|}\|w\|_X,\ {}^\forall w \in \mathcal{E}_0, {}^\forall t \in \mathbb{R}.$$

さらに，γ_{cu} を

$$\gamma_{cu} = \max\{r,\ \gamma^*\}$$

とします.

定理（中心不安定多様体の存在）$N \in \mathcal{C}^1(X, Y)$ であって，$\gamma_{cu} < \gamma$ ならば，ある正数 ε_0 が存在して次が成り立つ：$\|u_0\|_X, \|u_+\|_X < \varepsilon_0$ ならば以下を満たす写像 $h \in \mathcal{C}^0(\mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_+; Z_h)$ が一意に存在する:

- 多様体

  $$\mathcal{W}^{cu}_{loc} := \{(u_0 + u_+ + u_h) \in Z; u_h = h(u_0 + u_+)\}$$

  は (8.8) の流れについて局所不変であり，$h(0, 0) = 0$ を満たす.

証明 $u = u_0 + u_+ + u_h \in \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_+ \oplus X_h = X$ として方程式系

$$\begin{aligned}
\frac{du_0}{dt} &= L_0 u_0 + N_0^\varepsilon(u), \quad u_0 \in \mathcal{E}_0,\\
\frac{du_+}{dt} &= L_+ u_+ + N_+^\varepsilon(u), \quad u_+ \in \mathcal{E}_+,\\
\frac{du_h}{dt} &= L_h u_h + \mathbf{P}_h N(u), \quad u_h \in X_h
\end{aligned} \tag{8.10}$$

を考える．

$$(w_0(t, w_0^0 + w_+^0 + \psi), w_+(t, w_0^0 + w_+^0 + \psi))$$

を初期条件

$$w_0(0) = w_0(0, w_0^0 + w_+^0 + \psi) = w_0^0, \quad w_+(0) = w_+(0, w_0^0 + w_+^0 + \psi) = w_+^0$$

を満たす微分方程式系

$$\begin{aligned} \dot{w}_0 &= L_0 w_0 + N^\varepsilon(w_0 + w_+ + \psi(w_0 + w_+)), \quad w_0 \in \mathcal{E}_0 \\ \dot{w}_+ &= L_+ w_+ + N_+^\varepsilon(w_0 + w_+ + \psi(w_0 + w_+)), \quad w_+ \in \mathcal{E}_+ \end{aligned} \tag{8.11}$$

の解とします．

j 回微分がリップシッツ連続であるバナッハ空間 E から F への写像の空間 $\mathcal{C}^{k,1}$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{k,1}(E;F) \;\; &:= \;\; \Bigg\{ w \in \mathcal{C}^{k,1}(E;F); |w|_{j,Lip} \\ &\qquad := \sup_{x,y \in E, x \neq y} \frac{\|D^j w(x) - D^j w(y)\|}{\|x-y\|_E} < \infty, 0 \leq j \leq k \Bigg\} \end{aligned}$$

と定義する．$\mathcal{C}^{k,1}$ は ノルム

$$\|w; \mathcal{C}^{k,1}(E,F)\| := \|w; \mathcal{C}^k(E;V)\| + \max_{0 \leq j \leq k} |w|_{j,Lip}.$$

によってバナッハ空間となる．$E = F$ のときは，$\mathcal{C}^{k,1}(E;E) = \mathcal{C}^{k,1}(E)$ とかく．

$\psi(0,0) = 0$ を満たす $\psi \in C_b^{0,1}(\mathcal{E}; Z_h)$ に対して，写像 T を

$$\begin{aligned} &(T\psi)(w_0^0 + w_+^0) \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-L_h s} (\mathbf{P}_h N)(w_0(s, w_0^0 + w_+^0 + \psi) + w_+(s, w_0^0 + w_+^0 + \psi) + \psi(w_0 + w_+)) \, ds \end{aligned}$$

で定める．この T が 縮小写像であることが示されれば，$Th = h$ なる T の不動点 h は (8.8) の 局所不変な C^0-多様体である（前節の例を見よ）．

ある定数 p と p_1 が存在して，ψ はリプシッツ連続より，

$$
\begin{aligned}
&|\psi|_1 < p, \\
&\|\psi(w_0 + w_+) - \psi(\tilde{w}_0 + \tilde{w}_+)\|_{Z_h} \\
&< p_1(\|w_0 - \tilde{w}_0\|_{\mathcal{E}_0} + \|w_+ - \tilde{w}_+\|_{\mathcal{E}_+})
\end{aligned}
$$

が成り立つ．さらに，ψ はリプシッツ連続，$N(u)$ は 1 回（フレッシェ）微分可能であるから，

$$
\|w_0\|_{\mathcal{E}_0} < \varepsilon, \quad \|w_+\|_{\mathcal{E}_+} < \varepsilon
$$

である限り，ある正数 $k_*(\varepsilon)$, “$* = 0, +, h$” が存在して

$$
\begin{aligned}
&\|N_*^\varepsilon(w_0 + w_+ + \psi)\|_{Y_0} \le k_*(\varepsilon)\varepsilon, \text{“}* = 0, +\text{”}, \\
&\|\mathbf{P}_h N_h(w_0 + w_+ + \psi)\|_{Y_+} \le k_h(\varepsilon)\varepsilon, \\
&\|N_*^\varepsilon(w_0 + w_+ + w_h) - N_*^\varepsilon(\tilde{w}_0 + \tilde{w}_+ + \tilde{w}_h)\|_{Y_0} \\
&\le \kappa_*(\varepsilon)(\|w_0 - \tilde{w}_0\|_{\mathcal{E}_0} + \|w_+ - \tilde{w}_+\|_{\mathcal{E}_+} + \|w_h - \tilde{w}_h\|_{Y_h}), \quad \text{“}* = 0, +\text{”}, \\
&\|\mathbf{P}_h N(w_0 + w_+ + w_h) - \mathbf{P}_h N(\tilde{w}_0 + \tilde{w}_+ + \tilde{w}_h)\|_{Y_h} \\
&\le \kappa_h(\varepsilon)(\|w_0 - \tilde{w}_0\|_{\mathcal{E}_0} + \|w_+ - \tilde{w}_+\|_{\mathcal{E}_+} + \|w_h - \tilde{w}_h\|_{Y_h})
\end{aligned}
$$

が成り立つ．従って，

$$
|T\psi(w_0^0 + w_+^0)|_0 \quad \le \quad C_3\varepsilon\kappa_h(\varepsilon)\int_{-\infty}^0 e^{\gamma s}\, ds = C_3\varepsilon\kappa(\varepsilon)/\gamma.
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\tilde{w}_0(t) &= w_0(t, \tilde{w}_0^0 + \tilde{w}_+^0 + \psi(\tilde{w}_0^0 + \tilde{w}_+^0)), \\
\tilde{w}_+(t) &= w_+(t, \tilde{w}_0^0 + \tilde{w}_+^0 + \psi(\tilde{w}_0^0 + \tilde{w}_+^0))
\end{aligned}
$$

とおく．$N(u)$ が連続的微分可能であるから，$t \leq 0$ に対して（ψ のリプシッツ連続性も使うと）

$$\|w_+(t, w_0^0 + w_+^0 + \psi(w_0 + w_+)) - w_+(t, \tilde{w}_0^0 + \tilde{w}_+^0 + \psi(\tilde{w}_0 + \tilde{w}_+))\|_{\mathcal{E}_+}$$

$$\leq C_1 e^{\gamma^* t}\|w_0^0 - \tilde{w}_0^0\|_{\mathcal{E}_0}$$

$$+C_1\kappa_+(\varepsilon)\int_t^0 e^{\gamma^*(s-t)}\{\|w_0 - \tilde{w}_0\|_{\mathcal{E}_0} + \|w_+ - \tilde{w}_+\|_{\mathcal{E}_+}$$

$$+\|\psi(w_0^0 + w_+^0) - \psi(\tilde{w}_0^0 + \tilde{w}_+^0)\|_{Z_h}\}\, ds$$

$$\leq C_1 e^{\gamma^* t}\|w_0^0 - \tilde{w}_0^0\|_{\mathcal{E}_0}$$

$$+C_1\kappa_+(\varepsilon)(1+p_1)\int_t^0 e^{\gamma^*(s-t)}\{\|w_0 - \tilde{w}_0\|_{\mathcal{E}_0} + \|w_+ - \tilde{w}_+\|_{\mathcal{E}_+}\}\, ds.$$

同様にして，

$$\|w_0(t, w_0^0 + w_+^0 + \psi(w_0^0 + w_+^0)) - w_0(t, \tilde{w}_0^0 + \tilde{w}_+^0 + \psi(\tilde{w}_+^0 + \tilde{w}_0^0))\|_{\mathcal{E}_0}$$

$$\leq C_2(r)e^{rt}\|w_0^0 - \tilde{w}_0^0\|_{\mathcal{E}_0}$$

$$+(1+p_1)C_2(r)\kappa_0(\varepsilon)\int_t^0 e^{r(s-t)}\{\|w_0 - \tilde{w}_0\|_{\mathcal{E}_0} + \|w_+ - \tilde{w}_+\|_{\mathcal{E}_+}\}\, ds.$$

従って，

$$\|w_0-\tilde{w}_0\|_{\mathcal{E}_0}+\|w_+-\tilde{w}_+\|_{\mathcal{E}_+}$$

$$\leq 2\max\{C_1,C_2(r)\}e^{-\max\{\gamma^*,r\}t}\{\|w_0^0-\tilde{w}_0^0\|_{\mathcal{E}_0}+\|w_+^0-\tilde{w}_+^0\|_{\mathcal{E}_+}\}$$

$$+2(1+p_1)\max\{C_1\kappa_+(\varepsilon),C_2(r)\kappa_0(\varepsilon)\}$$

$$\times\int_t^0 e^{\max\{\gamma^*,r\}(s-t)}\{\|w_0-\tilde{w}_0\|_{\mathcal{E}_0}+\|w_+-\tilde{w}_+\|_{\mathcal{E}_+}\}\,ds.$$

グロンウォールの不等式から，

$$\|w_0-\tilde{w}_0\|_{\mathcal{E}_0}+\|w_+-\tilde{w}_+\|_{\mathcal{E}_+}\leq 2C_4\{\|w_0^0-\tilde{w}_0^0\|_X+\|w_+^0-\tilde{w}_+^0\|_X\}e^{-\tilde{\gamma}t}, \tag{8.12}$$

$$C_4=\max\{C_1,C_2(r)\},\quad \tilde{\gamma}=\max\{\gamma^*,r\}+2\kappa(\varepsilon)(1+p_1)C_4,$$
$$\kappa(\varepsilon)=\max\{\kappa_0(\varepsilon),\kappa_+(\varepsilon)\}.$$

ここまでの評価を用いると，十分小さい正数 ε に対して，スペクトルの存在範囲に関する定数 γ^*,γ と定数 p_1 （ψ のリプシッツ定数）,C_4（L_0,L_+ の生成する半群についての評価に係る係数） が

$$\tilde{\gamma}=\max\{\gamma^*,r\}+2\kappa(\varepsilon)(1+p_1)C_4<\gamma$$

を満たしているならば

$$
\begin{aligned}
&|T\psi(w_0^0+w_+^0)-T\psi(\tilde{w}_1^0+\tilde{w}_2^0)|_0\\
&\le \int_{-\infty}^0 C_3 e^{\gamma s}\|\mathbf{P}_h N(w_0+w_++\psi)-\mathbf{P}_h N(\tilde{w}_0+\tilde{w}_++\psi)\|_X\ ds\\
&\le C_3\kappa_h(\varepsilon)\int_{-\infty}^0 e^{\gamma s}\{\|w_0-\tilde{w}_0\|_{\mathcal{E}_0}+\|w_+-\tilde{w}_+\|_{\mathcal{E}_+}\\
&\qquad +\|\psi(w_0+w_+)-\psi(\tilde{w}_0+\tilde{w}_+)\|_{Z_h}\}\ ds\\
&\le C_3\kappa_h(\varepsilon)(C_4+p_1)\{\|w_0^0-\tilde{w}_1^0\|_{\mathcal{E}_0}+\|w_+^0-\tilde{w}_2^0\|_{\mathcal{E}_+}\}\int_{-\infty}^0 e^{(\gamma-\tilde{\gamma})s}\ ds\\
&\le C_3\kappa(\varepsilon)(C_4+p_1)(\gamma-\tilde{\gamma})^{-1}\{\|w_0^0-\tilde{w}_1^0\|_{\mathcal{E}_0}+\|w_+^0-\tilde{w}_2^0\|_{\mathcal{E}_+}\}.
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

次に，$\psi_1,\psi_2\in\mathcal{C}^{0,1}(\mathcal{E}_0\oplus\mathcal{E}_+,Z_h)$ をそのリプシッツ定数が $|\psi_j|_{Lip}<p_1$ を満たすものとする．

$$
\begin{aligned}
&|T\psi_1-T\psi_2|_0\\
&\le C_3\kappa_0(\varepsilon)\int_{-\infty}^0 e^{\gamma s}\{|\psi_1-\psi_2|_0+\|w_0(s,\psi_2)-w_0(s,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_0}\\
&\qquad\qquad +\|w_+(s,\psi_2)-w_+(s,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_+}\}\ ds\\
&\le C_3\kappa_0(\varepsilon)|\psi_1(w_0,w_+)-\psi_2(w_0,w_+)|_0+I_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 := \int_{-\infty}^0 & e^{\gamma s}\big(\|w_0(s,w_0^0,w_+^0,\psi_1)-w_0(s,w_0^0,w_0^0,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_0}+\\
&+\|w_+(s,w_0^0,w_+^0,\psi_1)-w_+(s,w_0^0,w_0^0,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_+}\big)ds.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$\|\psi_j(w_0, w_+)\|_X \leq \sup_{w_0\in\mathcal{E}_0, w_+\in\mathcal{E}_+} \|\psi_j(w_0 + w_+)\|_{Z_h} = |\psi_j|_0,\ j = 1, 2.$$

$w_*(t, \psi_j) = w_*(t, w_0^0 + w_+^0 + \psi_j)$, "$* = 0, +$", とすると

$$\|w_+(t, \psi_1) - w_+(t, \psi_2)\|_{\mathcal{E}_+}$$

$$\leq \left\| \int_t^0 e^{-L_+(s-t)}\{N_+^\varepsilon(w_0(s, \psi_1) + w_+(s, \psi_1) + \psi_1) \right.$$

$$\left. -N_+^\varepsilon(w_0(s, \psi_2) + w_+(s, \psi_2) + \psi_2)\}\ ds \right\|_{\mathcal{E}_+}$$

$$\leq C_1\kappa_+(\varepsilon) \int_t^0 e^{\gamma^*(s-t)}\{\|w_0(s, \psi_1) - w_0(s, \psi_2)\|_{\mathcal{E}_0}$$

$$+\|w_+(s, \psi_1) - w_+(s, \psi_2)\|_{\mathcal{E}_+} + |\psi_1 - \psi_2|_0\}ds$$

$$\leq C_1\kappa_+(\varepsilon)|\psi_1 - \psi_2|_0(\gamma^*)^{-1}(e^{-\gamma^* t} - 1)$$

$$+C_1\kappa_+(\varepsilon) \int_t^0 e^{\gamma^*(s-t)}\{\|w_0(s, \psi_1) - w_0(s, \psi_2)\|_{\mathcal{E}_0} + \|w_+(s, \psi_1) - w_+(s, \psi_2)\|_{\mathcal{E}_+}\}ds$$

$$\|w_0(t,\psi_1)-w_0(t,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_0}$$

$$\leq \left\| \int_t^0 e^{-L_0(s-t)}\{N^\varepsilon(w_0(s,\psi_1)+w_+(s,\psi_1)+\psi_1)\right.$$

$$\left. -N^\varepsilon(w_0(s,\psi_2)+w_+(s,\psi_2)+\psi_2)\}\ ds \right\|_{\mathcal{E}_0}$$

$$\leq C_2(r)\kappa_0(\varepsilon)\int_t^0 e^{r(s-t)}\{\|w_0(s,\psi_1)-w_0(s,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_0}$$

$$+\|w_+(s,\psi_1)-w_+(s,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_+}+|\psi_1-\psi_2|_0\}ds$$

$$\leq C_2(r)\kappa_0(\varepsilon)|\psi_1-\psi_2|_0(r)^{-1}(e^{-rt}-1)$$

$$+C_2(r)\kappa_0(\varepsilon)\int_t^0 e^{r(s-t)}\{\|w_0(s,\psi_1)-w_0(s,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_0}+\|w_+(s,\psi_1)-w_+(s,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_+}\}ds$$

従って，$t\leq 0$ で

$$\begin{aligned}&\|w_0(t,\psi_1)-w_0(t,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_0}+\|w_+(t,\psi_1)-w_+(t,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_+}\\&\leq 2C_4\kappa(\varepsilon)\max\{\gamma^{*-1},r^{-1}\}(e^{-\gamma_{cu}t}-1)|\psi_1-\psi_2|_0\\&+2C_4\kappa(\varepsilon)\int_t^0 e^{\gamma_{cu}(s-t)}\{\|w_0(s,\psi_1)-w_0(s,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_0}+\|w_+(s,\psi_1)-w_+(s,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_+}\}ds\end{aligned}$$

再びグロンウォールの不等式より

$$\begin{aligned}&\|w_0(s,\psi_1)-w_0(s,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_0}+\|w_+(s,\psi_1)-w_+(s,\psi_2)\|_{\mathcal{E}_+}\\&\leq 2C_4\kappa(\varepsilon)(\min\{\gamma^*,r\})^{-1}|\psi_1-\psi_2|_0(e^{-\gamma_{cu}t}-1)e^{-\gamma_2 t},\end{aligned}$$

ここで

$$\gamma_2=\gamma_{cu}+2C_4\kappa(\varepsilon).$$

従って，

$$
\begin{aligned}
I_1 \;\; \le \;\; & C_4\kappa(\varepsilon)(\min\{\lambda_+, r\})^{-1}|\psi_1-\psi_2|_0\int_{-\infty}^{0} e^{(\gamma - C_4\kappa(\varepsilon))s} + e^{(\gamma-\gamma_{cu}-2C_4\kappa(\varepsilon))s}\; ds \\
& = C_4\kappa(\varepsilon)(\min\{\lambda_+, r\})^{-1}|\psi_1-\psi_2|_0(\lambda_- - \gamma_2)^{-1}.
\end{aligned}
$$

これは，ε を十分小さくとって

$$\gamma - \gamma_{cu} - 2C_4\kappa(\varepsilon) > 0$$

のとき，すなわち，

$$\gamma - \max\{\gamma^*, r\} > 2\max\{C_1, C_2(r)\}\max\{\kappa_0(\varepsilon), \kappa_+(\varepsilon)\} \tag{8.13}$$

のとき広義積分は収束し， T は $\mathcal{C}^{0,1}(\mathcal{E}_0\oplus\mathcal{E}_+, Z_h)$ 上の縮小写像となる．

また，$(u_0+u_++u_h)=0\in X$ は (8.8) の平衡解であることと，中心不安定多様体 h は (8.8) の流れに対して不変であることから，$(u_0+u_++u_h)=0\in X$ は微分方程式系の初期値問題

$$
\begin{cases}
\dot{u}_0 = N_1^{\varepsilon}(u_0+u_++u_h), \\
\dot{u}_+ = N_2^{\varepsilon}(u_0+u_++u_h), \\
\dot{u}_h = h(u_0+u_+), u_0(0)=0, \quad u_+(0)=0, \quad u_h(0)=0
\end{cases}
$$

の解でなければならない．よって

$$N_0^{\varepsilon}(0,0,h(0,0)) = N_+^{\varepsilon}(0,0,h(0,0)) = h(0,0) = 0.$$

でなければならない．

$\square$

条件 (8.13) がスペクトルギャップ条件と呼ばれるものです．以降，条件 $\gamma_{cu}=\max\{r,\gamma^*\}<\gamma$ の下で中心不安定多様体の滑らかさと，それが局所吸引的であることを確かめます．

定理（中心不安定多様体の滑らかさ）$N \in \mathcal{C}^2(X,Y)$ であって，$\gamma_{cu} < \gamma$ が満たされているならば 十分小さい ε に対して，中心不安定多様体 h は以下を満たす；

$$(i) : h \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_+, Z_h).$$

$$(ii) \frac{\partial h}{\partial w_*}(0,0) = 0, \quad w_* \in \mathcal{E}_*, \text{“}* = 0,+\text{”},$$

証明

(i)：$h(w_0^0 + w_+^0), w_j^0 \in \mathcal{E}_0$ が w_0^0 について微分可能であることを示す（w_+ についても同様に示すことが出来る）.

$(w_0(t,w_+), w_+(t,w_+))$ を常微分方程式系

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= L_1 w_0 + N_1^\varepsilon(w_0 + w_+ + h(w_0,w_+)), \\ \dot{w}_2 &= L_2 w_+ + N_2^\varepsilon(w_0 + w_+ + h(w_0,w_+)) \end{aligned} \tag{8.14}$$

の解で初期条件

$$w_*(0) = w_*^0 := w_*(0, w_0^0 + w_+^0 + h(w_0^0 + w_+^0)), \quad \text{“}* = 0,+\text{”}$$

を満たすものとする．いま，上の問題は有限次元バナッハ空間における常微分方程式の初期値問題である．従って，解は初期値 (w_0^0, w_+^0) について微分可能である.

写像 $T^{(1)}$ を

$$
\begin{aligned}
&(T^{(1)}\psi^{(1)})(w_0^0+w_+^0)\\
&=\int_{-\infty}^0 e^{-L_h s}N^{(1)}(w_0(s,w_0^0+w_+^0+h)+w_0(s,w_0^0+w_+^0+h)+h,\psi^{(1)})\ ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&N^{(1)}(w_0+w_++h,\psi^{(1)})\\
&=\psi^{(1)}\cdot\frac{\partial\mathbf{P}_hN}{\partial v}(w_0+w_++v)\bigg|_{v=h}\\
&+\frac{\partial\mathbf{P}_hN}{\partial w_0}(w_0+w_++h)\left(\frac{\partial w_0}{\partial w_0^0}(s,w_0^0+w_+^0+v)+\psi^{(1)}\cdot\frac{\partial w_0}{\partial v}(s,w_0^0+w_+^0+v)\right)\bigg|_{v=h}\\
&+\frac{\partial\mathbf{P}_hN}{\partial w_+}(w_0+w_++h)\left(\frac{\partial w_+}{\partial w_+^0}(s,w_0^0+w_+^0+v)+\psi^{(1)}\cdot\frac{\partial w_+}{\partial v}(s,w_0^0+w_+^0+v)\right)\bigg|_{v=h}
\end{aligned}
$$

前の定理と同様にして，

$$K(\varepsilon)\to 0 \quad \text{as} \quad \varepsilon\to 0$$

なる正数 $K(\varepsilon)$ が存在して，もし

$$K(\varepsilon)<\gamma-\gamma^*$$

ならば十分小さい ε に対して，$T^{(1)}$ は $\mathcal{C}^1(\mathcal{E}_0\oplus\mathcal{E}_+,Z_h)$ 上の縮小写像となる．ここで，$K(\varepsilon)$ は $N^{(1)}$ に現れる関数：

$$\psi^{(1)},\quad \mathbf{P}_hN,\quad \frac{\partial\mathbf{P}_hN}{\partial v},\quad w_*,\quad \frac{\partial\mathbf{P}_hN}{\partial w_*},\quad \frac{\partial w_*}{\partial w_*^0},\quad \frac{\partial w_*}{\partial v},\quad (\text{“}*=0,+\text{”})$$

のリプシッツ定数と半群の評価に関する係数

$$C_1,\quad C_2(r),\quad C_3,\quad r,\quad \gamma^*$$

から定まる．

さらに，$T^{(1)}$ の不動点はリプシッツ写像であって，十分小さい正数 ε に対して

$$|(T^{(1)})^{(j)}\psi|_{Lip}\le|\psi|_{Lip},\ (j=0,1)$$

が成り立つ.

$\sigma \in \mathcal{E}_0$ と正数 $a > 0$ に対して $(w_0^0 + a\sigma \in \mathcal{E}_0)$

$$\zeta(w_0^0 + \cdot; a, \sigma) := \{h(\, w_0^0 + a\sigma) \, + \, \cdot\,) - h(w_0^0 + \, \cdot\,)\}/a,$$

$$\theta(w_0 + w_+ + h; a, \sigma) := \{\mathbf{P}_h N(w_0^+ + w_+^+ + h^+) - \mathbf{P}_h N(w_0 + w_+ + h)\}/a,$$

$$h^+ := h(w_0(t, \, (w_0^0 + a\sigma) \, + w_+^0) + w_+(t, w_0^0 + a\sigma + \, w_+^0)),$$

$$w_*^+ := w_*(t, \, (w_0^0 + a\sigma) \, + w_+^0 + h^+), \text{ “} * = 0, + \text{”}.$$

とすると

$$\begin{aligned}
&\zeta(w_0^0 + w_+^0 \, ; \, a, \sigma) \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{-L_h s} \{\theta(w_0 + w_+ + h; a, \sigma) + \sigma N^{(1)}(w_0 + w_+ + h, \zeta/\sigma) \\
&\qquad - \sigma N^{(1)}(w_0 + w_+ + h, \zeta/\sigma)\} \, ds.
\end{aligned}$$

ここで $N \in \mathcal{C}^2(X; Y)$ であり h がリプシッツ連続だから, $a \to 0$ とすると

$$m(a) := \sup_{t \in [0,\infty)} \|\theta(w_0 + w_+ + h; a, \sigma) - \sigma N^{(1)}(w_0 + w_+ + h, \zeta/\sigma)\|_X \to 0.$$

したがって，ある正数 $C_5(a)$ が存在して

$$\begin{aligned}
&G(a) := \sup_{\|w_j^0\| < \varepsilon} \|\zeta(w_0^0 + w_+^0; a, \sigma) - \sigma\psi^{(1)}(w_0^0 + w_+^0)\|_X \\
&\le C_3 \int_{-\infty}^0 e^{\gamma s} \|\sigma N_1^{(1)}(w_0 + w_+ + h, \zeta/\sigma) \\
&\qquad - \sigma N_1^{(1)}(w_0 + w_+ + h, \psi^{(1)})\|_X \, ds + \frac{C_3}{\gamma} m(a) \\
&\le C_5(a) G(a) + \frac{C_3}{\gamma} m(a).
\end{aligned}$$

よって

$$G(a) \to 0 \quad \text{as } a \to 0$$

が成り立つ．これは $\psi^{(1)}$ が $h(w_0^0+w_+^0)$ の w_0^0 についてのガトー微分であることに他ならない．さらに，$\psi^{(1)}(w_0^0+w_+^0)$ がリプシッツ連続より，

$$\frac{\partial h}{\partial w_0^0}(w_0^0+w_+^0)=\psi^{(1)}(w_0^0+w_+^0).$$

(ii); $w_*(s,0+0+h(0,0))=0$, ("$*=0,+$"), であって，$DN(0)=0$ より，（$\psi^{(1)}$ が $T^{(1)}$ の不動点であることに注意すると）

$$\frac{\partial h}{\partial w_0^0}(0,0)=0.$$

を得る．w_+ についても同様に示すことが出来る．

□

この定理と同様にして，$N\in C^k(X;Y), k=1,2,\cdots$ ならば，$h\in C_b^{k-1}(\mathcal{E}_0\oplus\mathcal{E}_+,Z_h)$ であることを示すことが出来ます．

定理（縮約原理）$\gamma_{cu}<\gamma$ とする．$h\in C^k(\mathcal{E}_0\oplus\mathcal{E}_+,Z_h), k\geq 2$ を (8.8) の滑らかな中心不安定多様体であるとする．$w_0(t)+w_+(t)\in\mathcal{E}_0\oplus\mathcal{E}_+$ が微分方程式系

$$\begin{aligned}\dot{w}_0&=L_0w_0+N_1^\varepsilon(w_0+w_++h(w_0,w_+)),\\ \dot{w}_+&=L_+w_++N_2^\varepsilon(w_0+w_++h(w_0,w_+)),\end{aligned}\tag{8.15}$$

の解ならば， (8.10) の解 u で $t\to\infty$ のとき，

$$\begin{aligned}u_0(t)&=w_0(t)+O(e^{-\mu t}),\\ u_+(t)&=w_+(t)+O(e^{-\mu t}),\\ u_h(t)&=h(u_0(t),u_+(t))+O(e^{-\mu t})\end{aligned}$$

を満たすものが存在する．ここに，μ は正の定数である．

証明 (8.15) はやはり有限次元における常微分方程式であるから，解の存在と一意性については成り立つ．

$v(t) := u_h(t) - h(u_0(t) + u_+(t)) \in X_h$ とする．

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= \dot{u}_h - D_{u_0}h(u_0+u_+)\dot{u}_0 - D_{u_+}h(u_0+u_+)\dot{u}_+ \\
&= L_h u_h + \mathbf{P}_h N(u_0+u_++u_h) \\
&\quad -D_{u_0}h(u_0+u_+)(L_0u_0 + N_0^{\varepsilon}(u_0+u_++u_h)) \\
&\quad -D_{u_+}h(u_0+u_+)(L_0u_0 + N_+^{\varepsilon}(u_0+u_++u_h)) \\
&\quad -L_h[h(u_0+u_+)] + L_h[h(u_0+u_+)]
\end{aligned} \tag{8.16}$$

$$\tag{8.17}$$

ここで，$w_h = h(w_0 + w_+)$ の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}
&L_h w_h + \mathbf{P}_h N(w_0 + w_+ + h(w_0+w_+)) \\
&= D_{w_0}h(w_0+w_+)(L_0w_0 + N_0^{\varepsilon}(w_0+w_+)) \\
&\qquad +D_{w_0}h(w_0+w_+)(L_0w_0 + N_0^{\varepsilon}(w_0+w_+)).
\end{aligned}$$

従って，$Lw_h = L_h h(w_0, w_+)$ より，L_h の $h(u_0+u_+)$ への作用は（中心不安定多様体は (8.10) の流れに対して不変であるから）

$$\begin{aligned}
&L_h h(u_0+u_+) \\
&= -\mathbf{P}_h N(u_0+u_++h(u_0+u_+)) \\
&\quad +D_{u_0}h(u_0+u_+)(L_0u_0 + N_0^{\varepsilon}(u_0+u_+)) \\
&\quad +D_{u_0}h(u_0+u_+)(L_0u_0 + N_0^{\varepsilon}(u_0+u_+)).
\end{aligned}$$

これと (8.16) より v は

$$\dot{v} = L_h v + Q(u_0+u_++v),$$

$$
\begin{aligned}
&Q(u_0+u_++v)\\
&=D_{u_0}h(u_0+u_+)\{N^\varepsilon(u_0+u_++h(u_0+u_+))-N^\varepsilon(u_0+u_++(v+h(u_0+u_+)))\}\\
&+D_{u_+}h(u_0+u_+)\{N_+^\varepsilon(u_0+u_++h(u_0+u_+))-N_+^\varepsilon(u_0+u_++(v+h(u_0+u_+)))\}\\
&+\mathbf{P}_hN(u_0+u_++(v+h(u_0+u_+)))-\mathbf{P}_hN(u_0+u_++h(u_0+u_+)).
\end{aligned}
$$

を満たす．$h\in\mathcal{C}^k(\mathcal{E}_0\oplus\mathcal{E}_+,Z_h), k\geq 2$ より，$u_*,\tilde{u}_*\in\mathcal{E}_*,$ (“$*=0,+$”) と $u_h\in X_h$ に対して $\delta(0)=0$ を満たすある正数 $\delta(\varepsilon)$ が存在して以下が成り立つ：

$$\|Q(u_0+u_++v))\|_Y\leq\delta(\varepsilon)\|v\|_{X_h}.$$

よって

$$\|v(t)\|_{X_h}\leq C_3\|v(0)\|_{X_h}e^{-\gamma t}+C_3\delta(\varepsilon)\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|v(s)\|_{X_h}\,ds.$$

従って，

$$\|v(t)\|_{X_h}\leq C_3\|v(0)\|_{X_h}e^{-(\gamma-C_3\delta(\varepsilon))t}. \tag{8.18}$$

すなわち，

$$\|u_3-h(u_0+u_+)\|_{X_h}\leq C_3\|u_3(0)-h(u_0(0)+u_+(0))\|_{X_h}e^{-(\gamma-C_3\delta(\varepsilon))t}$$

が成り立つ．

次に，$\phi_*:=u_*-w_*$, $(*=0,+)$, とおくと ϕ_* と v は次を満たす；

$$\begin{cases}\dot{\phi}_*=L_*\phi_*+R_*(\phi_0+\phi_++v),\ *=0,\,+,\\ \dot{v}=L_hv+Q(\,(\phi_0+w_0)\,+\,(\phi_++w_+)\,+\,v\,),\end{cases}\tag{8.19}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&R_*(\phi_0+\phi_++v)\\
&=N_*^\varepsilon(\,(w_0+\phi_0)\,+\,(w_++\phi_+)\,+\,(v+h(w_0+\phi_0+w_++\phi_+)\,)\,)\\
&-N_*^\varepsilon(w_0+w_++h(w_0+w_+)),\qquad \text{“}*=0,+\text{”}.
\end{aligned}
$$

非負の実数 $\eta \geq 0$ に対して，(8.19) の解を空間

$$\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{E}) := \left\{ w \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{E}); \|w\|_{\mathcal{F}_\eta} := \sup_{t \in [0,\infty)} e^{\eta t} \|w(t)\|_{\mathcal{E}} < \infty \right\}.$$

における不動点として求める．

$\eta \in (\gamma^*, \gamma)$ として

$$\phi_0 \in \mathcal{F}_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{E}_0), \quad \phi_+ \in \mathcal{F}_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{E}_+)$$

に対して，写像 $T_0, , T_+$ を

$$\begin{aligned} (T_0\phi_0)(t) &:= -\int_t^\infty e^{L_0(t-s)} R_0(\phi_0 + \phi_+ + v) \, ds, \\ (T_+\phi_+)(t) &:= -\int_t^\infty e^{L_+(t-s)} R_+(\phi_0 + \phi_+ + v) \, ds \end{aligned}$$

で定める．さらに写像 $\mathbf{T}$ を

$$[\mathbf{T}(\phi_0 + \phi_+)](t) = (T_0\phi_0)(t) + (T_+\phi_+)(t)$$

で定める．ϕ_0, ϕ_+ が $\mathbf{T}$ の不動点ならば，(8.19) の解は $F_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ の元である．そのために，$\mathbf{T}$ が $\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ からそれ自身への縮小写像であることを示す．

N_0^ε, N_+^ε の評価を用いて

$$\begin{aligned} &\|R_0(\phi_0 + \phi_+)\|_{\mathcal{E}_0} \leq \kappa_0(\varepsilon)\{(1 + p_1)(\|\phi_0\|_{\mathcal{E}_0} + \|\phi_+\|_{\mathcal{E}_+}) + \|v\|_{X_h}\}, \\ &\|R_+(\phi_0 + \phi_+)\|_{\mathcal{E}_+} \leq \kappa_+(\varepsilon)\{(1 + p_1)(\|\phi_0\|_{\mathcal{E}_0} + \|\phi_+\|_{\mathcal{E}_+}) + \|v\|_{X_h}\}, \end{aligned}$$

とできる．従って，(8.18) を使うと

$$\|T_0\phi_0\|_{\mathcal{F}_\eta} \le \kappa_0(\varepsilon) \sup_{t\ge 0} e^{\eta t} \left\| \int_t^\infty e^{L_0(t-s)} R_0(\phi_0+\phi_++v)\ ds \right\|_{\mathcal{E}_0}$$

$$\le \kappa_0(\varepsilon) C_2(r)(1+p_1)$$
$$\times \sup_{t\ge 0} e^{\eta t} \left\{ \int_t^\infty e^{r(s-t)}\ (\|\phi_0\|_{\mathcal{E}_0} + \|\phi_+\|_{\mathcal{E}_+} + \|v\|_{X_h})\}\ ds \right\}$$

$$\le \kappa_0(\varepsilon) C_2(r)(1+p_1)$$
$$\times \sup_{t\ge 0} e^{\eta t} \left\{ \int_t^\infty e^{r(s-t)-\eta s} e^{\eta s} (\|\phi_0\|_{\mathcal{E}_0}) + \|\phi_+\|_{\mathcal{E}_+} + \|v\|_{X_h})\ ds \right\}$$

$$\le \kappa_0(\varepsilon) C_2(r)(1+p_1)$$
$$\times \sup_{t\ge 0} e^{\eta t} \left\{ (\|\phi_0\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E}_0)} + \|\phi_+\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E}_+)} + \|v\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},X_h)}) \int_t^\infty e^{r(s-t)-\eta s}\, ds \right\}$$

$$\le \frac{\kappa_0(\varepsilon) C_2(r)(1+p_1)}{\eta - r} (\|\phi_0\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E}_0)} + \|\phi_+\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E}_+)} + \|v\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},X_h)}) < \infty$$

$\gamma^* < \eta < \gamma$ と (8.18) を使うと，全く同様にして，

$$\|T_+\phi_+\|_{\mathcal{F}_\eta} \le \kappa_+(\varepsilon) \sup_{t\ge 0} e^{\eta t} \left\| \int_t^\infty e^{L_+(t-s)} R_0(\phi_0+\phi_++v)\ ds \right\|_{\mathcal{E}_+}$$

$$\le \kappa_+(\varepsilon) C_1(1+p_1)$$
$$\times \sup_{t\ge 0} e^{\eta t} \left\{ \int_t^\infty e^{\gamma^*(s-t)}\ (\|\phi_0\|_{\mathcal{E}_0} + \|\phi_+\|_{\mathcal{E}_+} + \|v\|_{X_h})\}\ ds \right\}$$

$$\le \kappa_+(\varepsilon) C_1(1+p_1)$$
$$\times \sup_{t\ge 0} e^{\eta t} \left\{ (\|\phi_0\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E}_0)} + \|\phi_+\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E}_+)} + \|v\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},X_h)}) \int_t^\infty e^{\gamma^*(s-t)-\eta s}\, ds \right\}$$

$$\le \frac{\kappa_+(\varepsilon) C_1(1+p_1)}{\eta - \gamma^*} (\|\phi_0\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E}_0)} + \|\phi_+\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E}_+)} + \|v\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},X_h)}) < \infty$$

したがって，$\mathbf{T}$ は $\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})$ からそれ自身への写像である．

次に，$\mathbf{T}$ が十分小さい ε について縮小写像であることを示す．ϕ_0, ϕ_+ と $\tilde{\phi}_0$, $\tilde{\phi}_+$, さらに $v(0)=\tilde{v}(0)$ を満たす $v(t),\tilde{v}(t)\in X_h$ に対して，

$$
\begin{aligned}
&\|Q(\phi_0+\phi_++v)-Q(\tilde{\phi}_0+\tilde{\phi}_++\tilde{v})\|_Y\\
&\le \max\{\|v\|_{X_h},\|\tilde{v}\|_{X_h}\}\|D_{\phi_0}h(\phi_0+\phi_+)-D_{\tilde{\phi}_0}h(\tilde{\phi}_0+\tilde{\phi}_+)\|_{X_h}\\
&\qquad+\max\{\|v\|_{X_h},\|\tilde{v}\|_{X_h}\}\|D_{\phi_+}h(\phi_0+\phi_+)-D_{\tilde{\phi}_+}h(\tilde{\phi}_0+\tilde{\phi}_+)\|_{X_h}\\
&\qquad+\|\mathbf{P}_hN(\phi_0+\phi_++v+h(\phi_0+\phi_+))-\mathbf{P}_hN(\phi_0+\phi_++h(\phi_0+\phi_+))\\
&\qquad-\mathbf{P}_hN(\tilde{\phi}_0+\tilde{\phi}_++\tilde{v}+h(\tilde{\phi}_0+\tilde{\phi}_+))+\mathbf{P}_hN(\tilde{\phi}_0+\tilde{\phi}_++h(\tilde{\phi}_0+\tilde{\phi}_+))\|_{X_h}\\
&\le 2p_2\kappa(\varepsilon)\max\{\|v\|_{X_h},\|\tilde{v}\|_{X_h}\}(\|\phi_0-\tilde{\phi}_0\|_{\mathcal{E}_0}+\|\phi_+-\tilde{\phi}_+\||_{\mathcal{E}_+})\\
&\qquad+\kappa_h(\varepsilon)[2(1+p_1)(\|\phi_0-\tilde{\phi}_0\||_{\mathcal{E}_0}+\|\phi_+-\tilde{\phi}_+\||_{\mathcal{E}_+})+\|v-\tilde{v}\|_{X_h}].
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\kappa(\varepsilon)=\max\{\kappa_0(\varepsilon),\kappa_+(\varepsilon)\},\\
&p_2=\max\{|D_{u_0}h(u_0+u_+)|_{Lip},|D_{u_+}h(u_0+u_+)|_{Lip}\}
\end{aligned}
$$

である．表記の煩雑さを避けるために

$$
\begin{aligned}
\phi&=\phi_0+\phi_+\in\mathcal{E}:=\mathcal{E}_0\oplus\mathcal{E}_+,\\
\tilde{\phi}&=\tilde{\phi}_0+\tilde{\phi}_+\in\mathcal{E}:=\mathcal{E}_0\oplus\mathcal{E}_+
\end{aligned}
$$

とかくと，

$$
\|v(t)-\tilde{v}(t)\|_{X_h}\le \kappa_h(\varepsilon)C_3\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|v(s)-\tilde{v}(s)\|_{X_h}\,ds+I_2,
$$

$$
\begin{aligned}
I_2&\le 2C_3(1+p_1)\max\{\kappa(\varepsilon),\kappa_h(\varepsilon)\}\\
&\qquad\times\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}(p_2\max\{\|v(s)\|_{X_h},\|\tilde{v}(s)\|_{X_h}\}+1)\|\phi(s)-\tilde{\phi}(s)\|_{\mathcal{E}}\,ds.
\end{aligned}
$$

(8.18) より，

$$
\max\{\|v(s)\|_{X_h},\|\tilde{v}(s)\|_{X_h}\}\le C_3\|v(0)\|_{X_h}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
&I_2 \le 2C_3(1+p_1)\max\{\kappa(\varepsilon), \kappa_h(\varepsilon)\}\\
&\le 2C_3(1+p_1)\max\{\kappa(\varepsilon), \kappa_h(\varepsilon)\}(1+C_3p_2\|v(0)\|_{X_h})\\
&\qquad \times \int_0^t e^{-\gamma(t-s)-\eta s} e^{\eta s}\|\phi(s)-\tilde{\phi}(s)\|_{\mathcal{E}}\, ds.\\
&\le 2C_3(1+p_1)\max\{\kappa(\varepsilon), \kappa_h(\varepsilon)\}(1+C_3p_2\|v(0)\|_{X_h})\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})}\\
&\qquad \times \int_0^t e^{-\gamma(t-s)-\eta s}\, ds
\end{aligned}
$$

したがって，$\gamma^* < \eta < \gamma$ に注意して

$$
I_2 \le \frac{2C_3(1+p_1)\max\{\kappa(\varepsilon), \kappa_h(\varepsilon)\}}{\gamma-\eta}(1+C_3p_2\|v(0)\|_{X_h})\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})}(e^{-\eta t}-e^{-\gamma t}).
$$

よって

$$
C_6(\varepsilon) := \frac{2C_3(1+p_1)\max\{\kappa(\varepsilon), \kappa_h(\varepsilon)\}}{\eta-\gamma^*}(1+C_3p_2\|v(0)\|_{X_h})
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
\|v(t)-\tilde{v}(t)\|_{X_h} &\le C_6(\varepsilon)\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})}(e^{-\eta t}-e^{-\gamma t})\\
&\quad +\kappa_h(\varepsilon)C_3\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|v(s)-\tilde{v}(s)\|_{X_h}\, ds.
\end{aligned}
$$

従って，

$$
\|v(t)-\tilde{v}(t)\|_{X_h} \le C_6(\varepsilon)\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})}(e^{-\eta t}-e^{-\gamma t})e^{C_3\kappa_h(\varepsilon)t}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|T_+\phi_+ - T_+\tilde{\phi}_+\|_{\mathcal{E}_+}(t)\\
&\le \kappa(\varepsilon)(1+p_1)C_1\int_t^\infty e^{\gamma^*(s-t)}\{\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{E}} + \|v-\tilde{v}\|_{X_h}\}\, ds.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
&\int_t^\infty e^{\gamma^*(s-t)}\|v-\tilde{v}\|_{X_h}\,ds \\
&\leq C_6(\varepsilon)\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})}\int_t^\infty e^{\gamma^*(s-t)}(e^{-\eta s}-e^{-\gamma s})e^{C_3\kappa_h(\varepsilon)s}\,ds \\
&\leq C_6(\varepsilon)\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})} \\
&\times\left\{\frac{e^{\{-\eta+C_3\kappa_h(\varepsilon)\}t}}{|\gamma^*-\eta+C_3\kappa_h(\varepsilon)|}+\frac{e^{\{-\gamma+C_3\kappa_h(\varepsilon)\}t}}{|\gamma^*-\gamma+C_3\kappa_h(\varepsilon)|}\right\} \\
&\leq 2C_6(\varepsilon)\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})}\frac{e^{\{-\eta+C_3\kappa_h(\varepsilon)\}t}}{\eta-\gamma^*}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_t^\infty e^{\gamma^*(s-t)}\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{E}}\,ds &\leq \|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})}\int_t^\infty e^{\gamma^*(s-t)-\eta s}\,ds \\
&\leq \frac{\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})}}{\eta-\gamma^*}e^{-\eta t} \\
&\leq \frac{\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})}}{\eta-\gamma^*}e^{\{-\eta+C_3\kappa_h(\varepsilon)\}t} \\
&\leq \frac{\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})}}{\eta-\gamma^*}e^{\{-\eta+C_3\kappa_h(\varepsilon)\}t}
\end{aligned}
$$

故に，

$$
\|T_+\phi_+-T_+\tilde{\phi}_+\|_{\mathcal{E}_+}(t)e^{\{-\eta+C_3\kappa_h(\varepsilon)\}t}\leq\kappa(\varepsilon)(1+p_1)C_1\frac{(2C_6(\varepsilon)+1)\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})}}{\eta-\gamma^*}
$$

ここで，$(T_+\phi_+)(t)$ は $\gamma^*<\eta<\gamma$ なる η について，$\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E}_+)$ からそれ自身への写像である．よって，十分小さい $\varepsilon>0$ に対して，

$$
\gamma^*<\eta-C_3\kappa_h(\varepsilon)<\gamma
$$

であって

$$
\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E}_+)\subset\mathcal{F}_{\{\eta-C_3\kappa_h(\varepsilon)\}}(\mathbb{R},\mathcal{E}_+).
$$

従って，

$$
\tilde{\eta}:=\eta-C_3\kappa_h(\varepsilon)
$$

とおくと，

$$
\gamma^*<\tilde{\eta}:=\eta-C_3\kappa_h(\varepsilon)<\gamma
$$

である限り，

$$\begin{aligned}&\|T_+\phi_+ - T_+\tilde{\phi}_+\|_{\mathcal{F}_{\tilde{\eta}}(\mathbb{R},\mathcal{E}_+)}\\&\leq \kappa(\varepsilon)(1+p_1)C_1\frac{(2C_6(\varepsilon)+1)}{\eta-\gamma^*}\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_{\tilde{\eta}}(\mathbb{R},\mathcal{E})}.\end{aligned}$$

同様にして，(C_1 を $C_2(r)$ に，γ^* を r に取り換えて)

$$\|T_0\phi_0 - T_0\tilde{\phi}_0\|_{\mathcal{E}_+}(t)e^{\{-\eta+C_3\kappa_h(\varepsilon)\}t} \leq \kappa(\varepsilon)(1+p_1)C_2(r)\frac{(2C_6(\varepsilon)+1)\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})}}{\eta-r}$$

より，

$$\begin{aligned}&\|T_0\phi_0 - T_0\tilde{\phi}_0\|_{\mathcal{F}_{\tilde{\eta}}(\mathbb{R},\mathcal{E}_0)}\\&\leq \kappa(\varepsilon)(1+p_1)C_2(r)\frac{(2C_6(\varepsilon)+1)}{\eta-r}\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_{\tilde{\eta}}(\mathbb{R},\mathcal{E})}\end{aligned}$$

が成り立つ．従って，

$$\gamma_{cu} = \max\{r,\,\gamma^*\}$$

より

$$\begin{aligned}&\|T_+\phi_+ - T_+\tilde{\phi}_+\|_{\mathcal{F}_{\tilde{\eta}}(\mathbb{R},\mathcal{E}_0)}\\&\leq \kappa(\varepsilon)(1+p_1)C_1\frac{(2C_6(\varepsilon)+1)}{\tilde{\eta}-\gamma_{cu}}\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_{\tilde{\eta}}(\mathbb{R},\mathcal{E})},\end{aligned}\tag{8.20}$$

$$\begin{aligned}&\|T_0\phi_0 - T_0\tilde{\phi}_0\|_{\mathcal{F}_{\tilde{\eta}}(\mathbb{R},\mathcal{E}_0)}\\&\leq \kappa(\varepsilon)(1+p_1)C_2(r)\frac{(2C_6(\varepsilon)+1)}{\tilde{\eta}-\gamma_{cu}}\|\phi-\tilde{\phi}\|_{\mathcal{F}_{\tilde{\eta}}(\mathbb{R},\mathcal{E})}.\end{aligned}\tag{8.21}$$

(8.20) と (8.21) をあわせると，

$$\max\{r,\,\gamma^*\} = \gamma_{cu} < C_3\kappa(\varepsilon) < \gamma$$

なる十分小さい正数 ε に対して $\gamma_{cu} < \eta < \gamma$ を満たすある定数 η が存在して，写像

$$\mathbf{T} : \mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E}) \to \mathcal{F}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{E})$$

は縮小写像である．

次に，写像 $\mathcal{S}: X \to X$ を

$$\mathcal{S}: (w_0^0 + w_+^0 + v(0)) \mapsto (u_0(t) + u_+(t) + v(0))$$

で定める．$\mathcal{S}$ が 1 対 1 であることを示そう．表記の簡略化のために

$$w = w_0 + w_+ \in \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}, \quad u = u_0 + u_+ \in \mathcal{E}$$

とかく．

$$w(0) \neq \tilde{w}(0)$$

ならば

$$\mathcal{S}(w(0) \,+\, v(0)) \neq \mathcal{S}(\tilde{w}(0) \,+\, v(0))$$

を示したい．

$$(u(t) \,+\, v(0)) = \mathcal{S}(w(0) \,+\, v(0)), \quad (\tilde{u}(t) \,+\, v(0)) = \mathcal{S}(\tilde{w}(0) \,+\, v(0))$$

とする．

$w(t)$, $\tilde{w}(t)$ は有限次元バナッハ空間における微分方程式の解であるから， 初期値に関して解は一意である． 従って，$w(0) = \tilde{w}(0)$ ならば

$$w(t; w(0)) = \tilde{w}(t; \tilde{w}(0)), \quad t \geq 0.$$

ここで，

$$\phi(t) = u(t) - w(t) \in \mathcal{E}, \quad \tilde{\phi}(t) = \tilde{u}(t) - \tilde{w}(t) \in \mathcal{E}$$

であることより，

$$w(t) = u(t) - \phi(t), \quad \tilde{w}(t) = \tilde{u}(t) - \tilde{\phi}(t).$$

従って，

$$\|w(t) - \tilde{w}(t)\|_{\mathcal{E}} \leq \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{\mathcal{E}} + \|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|_{\mathcal{E}}.$$

$u(t) = \tilde{u}(t)$ ならば

$$\|w(t) - \tilde{w}(t)\|_{\mathcal{E}} \le \|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|_{\mathcal{E}}.$$

もし $w(0) \ne \tilde{w}(0)$ ならば $w(t) \ne \tilde{w}(t)$ であって，さらに (8.12) より

$$\gamma > \alpha > \gamma_{cu} + 2\max\{\kappa_0(\varepsilon), \kappa_+(\varepsilon)\}(1 + p_1)\max\{C_1, C_2(r)\}$$

をみたす定数 α に対して $t \to \infty$ のとき，

$$e^{\alpha t}\|w(t) - \tilde{w}(t)\|_{\mathcal{E}} \to \infty.$$

一方，$\gamma_{cu} < \eta < \gamma$ なる η について

$$\phi(t) \in \mathcal{F}_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{E})$$

より，　$\gamma_{cu} < \alpha < \gamma$ を満たすある定数 α があって，

$$e^{\alpha t}\|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|_{\mathcal{E}} < \infty.$$

従って，

$$w(t) = \tilde{w}(t), \quad t \ge 0$$

でなければならない．よって，$w(0) \ne \tilde{w}(0)$ ならば $u(t) \ne \tilde{u}(t)$.　□

系（不変多様体）(8.8) において L のスペクトル集合

$$\sigma = \sigma_- + \sigma_0 + \sigma_+$$

が，さらに以下を満たすとする．

- $$\sigma_- = \sigma_{*-} + \sigma_-^*$$

  であって，σ_-^* はその重複度も込めて有限個の固有値からなるものとする．

- ある正数 $\gamma > \gamma_*$ が存在して

$$\sup_{\lambda \in \sigma_{*-}} \lambda < -\gamma, \quad -\gamma_* < \inf_{\lambda \in \sigma_-^*} \lambda, \quad \sup_{\lambda \in \sigma_-^*} \lambda < 0$$

  が成り立つ．

$$\gamma_{scu} = \max\{\gamma_*,\, r,\, \gamma^*\}$$

とおく．このとき，$\gamma_{scu} < \gamma$ ならば，(8.8) の局所吸引的な不変多様体:

$$\mathcal{W}_{loc}^{scu} := \{u = u_h + u_-^* + u_0 + u_+\,;\, u_h = h(u_-^* + u_0 + u_+)\}$$

が存在する．ここで，u_-^* は σ_-^* に対応する Dunford 積分から定まる射影作用素 $\mathbf{P}_-^*$ による u の像 $\mathbf{P}_-^* u$ である．不変多様体 $\mathcal{W}_{loc}^{scu}$ は $N \in \mathcal{C}^k$ ならば $h \in \mathcal{C}^{k-1}$ である．さらに縮約原理が成り立つ．

参考文献

[1] Carr J, Applications of Center Manifold Theory, Springer,1981.

[2] Engel J. N and Nagel R, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer, 1999.

[3] Guckenheimer J and Holmes P，Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer, 1983.

[4] Henry D, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, springer, 1981.

[5] Hirsch W M, Smale S and Devaney L R, Differential Equations, Dynamical systems, and Introduction to Chaos, 3rd ed., Academic Press, 2012.

[6] HARAGUS M and IOOSS G, Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimentional Dynamical Systems, Springer, 2010.

[7] KATO T, Perturbation theory for linear operators, Springer, 2^{nd}, springer, 1980.

[8] KUZNETSOV A Y, Elements of Applied bifurcation theory, 3rd ed., Springer, 1997.

[9] WIGGINS S, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos 2^{nd} ed., Springer, 2003.

[10] ADAMS A R AND FURNIER J. F. J
Sobolev Spaces, 2^{nd} ed., Elsevier, 2003.

[11] ARMBRUSTER D, GUKENHEIMER J , AND HOLMES P, *Heteroclinic cycles and Modulated Travelling waves in system with O(2) symmetry*, Physica,29D(1988),pp.257-282.

[12] ARMBRUSTER D, GUKENHEIMER J , AND HOLMES P, *Kuramoto-Sivashinsky Dynamics on the center-unstable manifold*, SIAM J. Appl. Math., 49(1989), pp.676-691.

[13] DUMORTIER F AND KOKUBU H, *Chaotic dynamics in $\mathbb{Z}_2$-equivariant unfoldings of codimension three singularities of vector fields*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, vol. 20 (2000), 85 – 107.

[14] ELPHICK C, TIRAPEGUI E, BRACHET E M, COULLET P and IOSS G. *A simple global characterization for normal forms of singular vector fields*, Physica 29D (1987), 95–127

[15] HARTMAN P, *A lemma in the theory of structural stability of differential equations*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 11(1960), 610–620.

[16] OGAWA T AND OKUDA T, *Oscillatory dynamics in a reaction-diffusion system in the presence of 0:1:2 resonance*, Networks and Heterogeneous Media, vol. 7 (2012, Dec.) , no. 4, 893 - 926.

[17] OGAWA T AND SAKAMOTO O T, *Double zero degeneracy in an integro-differential reaction-diffusion system in the presence of 0:1:2 resonance: Time-periodic solutions, Heteroclinic cycles, Homoclinic orbits* , preprint.

[18] 小川知之. 非線形現象と微分方程式 -パターンダイナミクスの分岐解析-，サイエンス社，2010

[19] 松葉育雄，力学系カオス，森北出版, 2011.

[20] クラーク ロビンソン（著），
國府寛司（訳），柴山健伸（訳），岡宏枝（訳），
力学系（上，下），シュプリンガーフェアラーク東京, 2001

[21] 八木厚志，放物型発展方程式とその応用（上，下），岩波書店，2011.