

第11章

時系列データ: 諸問題

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \dots + \beta_k x_{tk} + u_t$$

Ch.11 時系列データ: 他のトピック

1. 定常性と弱従属性時系列
2. OLSの漸近的特性*
3. 回帰分析での高持続性時系列
4. 動学的完全モデルと無系列相関*
5. 時系列モデルの均一分散仮定*

11-1 定常性と弱従属性時系列

◆これまでの制約的仮定

- 強外生性、均一分散、非系列相関
 - ◆ 時系列データではかなり厳しい要求
 - ◆ 統計的推論は、正規性仮定の妥当性に依存
- 大標本では、かなり弱い仮定でOK
 - ◆ 時系列の大標本分析は、**定常性と弱従属性**がカギ

◆11-1a 定常性時系列

- 確率的性質および時間的依存構造が経時的に変化しなければ、その時系列は定常的

11-1 定常性と弱従属性時系列

◆定常確率過程Stationary stochastic processes

- $(x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm})$ の結合分布が $(x_{t1+h}, x_{t2+h}, \dots, x_{tm+h})$ のものと等しいとき、確率過程 $\{x_t; t = 1, 2, \dots\}$ は定常

◆共分散定常過程Covariance stationary processes

- 期待値、分散、共分散が経時的に一定ならば、確率過程 $\{x_t; t = 1, 2, \dots\}$ は共分散定常
 - ◆ $E(x_t) = \mu$
 - ◆ $Var(x_t) = \sigma^2$
 - ◆ $Cov(x_t, x_{t+h}) = f(h)$

11-1 定常性と弱従属性時系列

◆11-1b 弱従属性時系列Weakly dependent time series

- h が無限大に近づくとき x_t が x_{t+h} と「ほぼ独立」なら、確率過程 $\{x_t; t = 1, 2, \dots\}$ は**弱従属性**

◆弱従属性について

- 弱従属性の意味は、 h が無限大になると x_t と x_{t+h} の相関が0に収束
 - ◆ LLNとCLTの保持のために、個々の観測値が互いに強く関連してはならない。
 - ◆ その関係は離れているほど（十分速く）弱くなる
 - ◆ 非定常だが弱従属的な系列もあり得る

11-1 定常性と弱従属性時系列

◆弱従属性時系列の例

■ Moving average process of order one [MA(1)]

$$x_t = e_t + \alpha_1 e_{t-1}, t = 1, 2, \dots$$

- この過程は*i.i.d.*系列 e_t の短期移動平均
- 1期以上離れた観測値とは共通点がない(=相関がない)ため、この過程は弱従属性

■ Autoregressive process of order one [AR(1)]

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \dots$$

- この過程は前期の値の一部(+*i.i.d.*系列 e_t のランダムショック)
- ⇒ $Corr(y_t, y_{t+h}) = \rho_1^h$
- 安定条件 $|\rho_1| < 1$ が成り立つ場合、観測値間の距離が無限になると系列相関がゼロに収束するため、仮定は弱従属性

11-2 OLSの漸近特性

- ◆ Assumption TS.1' (Linear in parameters)
 - 仮定TS.1と同じだが、従属変数と独立変数は定常かつ弱従属的と仮定
- ◆ Assumption TS.2' (No perfect collinearity)
 - 仮定TS.2と同じ
- ◆ Assumption TS.3' (Zero conditional mean)
 - 説明変数は強外生性でなく同時外生性を仮定
 $E(u_t | \mathbf{x}_t) = 0$
 - 説明変数は同じ期の誤差項とは平均的に独立

入門計量経済学

7

11-2 OLSの漸近特性

- ◆ Theorem 11.1 (Consistency of OLS)

$$TS.1' - TS.3' \Rightarrow \text{plim } \hat{\beta}_j = \beta_j, \quad j = 0, 1, \dots, k$$
 - 重要: 一致性のためには、説明変数が単に誤差項と同時に非相関と仮定するだけで十分
- なぜ強外生性仮定の緩和が重要か?
 - ◆ 強外生性は説明変数と誤差項のあらゆる種類の動学的関係性を排除するため、厳しい制約
 - ◆ 特に(経済状況では非常に一般的な)説明変数の将来値に対する従属変数からのフィードバックを排除
 - ◆ 強外生性は説明変数としてラグ付き従属変数の使用を排除

入門計量経済学

8

11-2 OLSの漸近特性

- ◆ 例11.3 AR(1)モデル
 - なぜラグ付き従属変数は強外生性に反するのか?
 - ◆ 基本モデル: $y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + u_t$
 - 同時外生性: $E(u_t | y_{t-1}) = 0$
 - 強外生性: $E(u_t | y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0$
 - 誤差項がすべての $y_{t-1}, t = 1, \dots, n$ と無相関を意味
 - これは以下と矛盾

$$\text{Cov}(y_t, u_t) = \beta_1 \text{Cov}(y_{t-1}, u_t) + \text{Var}(u_t) > 0$$
 - ラグ付き従属変数のOLS推定
 - ◆ 同時外生性のもとでOLS推定量は一致性だが、不偏性ではない

入門計量経済学

9

11-2 OLSの漸近特性

- ◆ Assumption TS.4' (Homoskedasticity)

$$\text{Var}(u_t | \mathbf{x}_t) = \text{Var}(u_t) = \sigma^2$$
 - ◆ 誤差項は同時均一分散
- ◆ Assumption TS.5' (No serial correlation)

$$\text{Corr}(u_t, u_s | \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_s) = 0, \quad t \neq s$$
 - ◆ t, s 期の説明変数の下で誤差項は無相関
- ◆ Theorem 11.2 (Asymptotic normality of OLS)
 - 仮定TS.1'-TS.5'の下でOLS推定量は漸近的正規分布
 - ◆ 通常のOLS標準誤差、t統計、F統計は漸近的に有効

入門計量経済学

10

11-2 OLSの漸近特性

- ◆ 例11.4: 効率市場仮説(EMH)

$$E(\text{return}_t | \text{return}_{t-1}, \text{return}_{t-2}, \dots) = E(\text{return}_t)$$
 - ◆ EMHとは「 t 週以前の市場情報は、 t 週の収益予測に役立たない」とする説で、ここでは「関連市場情報として考慮されるのは過去の収益のみ」と仮定
 - EMH検証の簡便方法: AR(1)モデルを指定
 - ◆ EMHの下では仮定TS.3'が成立するため、今週の収益の先週の収益への依存性検定にOLS回帰が可能
- $$\widehat{\text{return}}_t = \begin{matrix} .180 & + & .059 & \text{return}_{t-1} \\ (.081) & & (.038) \end{matrix}$$
- $n = 689, R^2 = .0035, \bar{R}^2 = .0020$
- EMHを否定する証拠はない。より多くのラグ付き収益を含めても、同様の結果が得られる。

入門計量経済学

11

11-3 回帰分析での高持続性時系列

- ◆ 11-3a 高持続的な時系列
 - 回帰分析におけるトレンド定常系列の利用
 - ◆ 確定的な時間推移を持つ時系列は非定常
 - ◆ そのうちトレンド周りで定常的+弱従属性の場合は、トレンド定常過程と呼称
 - ◆ トレンド定常過程も仮定TS.1'を満たす
 - 回帰分析での高度に持続的な時系列の利用
 - ◆ 多くの経済時系列は、高持続性(=強従属性)のため、弱従属性に抵触
 - ◆ この場合、OLSは(CLMが成立しない限り)一般に無効
 - ◆ 場合によっては、弱従属への変換も可能

入門計量経済学

12

11-3 回帰分析での高持続性時系列

◆11-3a 高持続的な時系列

■ Random walks

$$y_t = y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \dots$$

- 前の位置 y_{t-1} から $i.i.d.$ であるランダムな量 e_t だけ移動

$$\Rightarrow y_t = (y_{t-2} + e_{t-1}) + e_t = \dots = e_t + e_{t-1} + \dots + e_1 + y_0$$

- 現在値は過去の全ショックの累積に初期値を加えたもの
- このためランダムウォークは高持続的であり、ショックの影響は永遠に系列に含まれる

◆ランダムウォークの性質

$$E(y_t) = E(y_0) \quad \text{Var}(y_t) = \sigma_e^2 t$$

- ランダムウォークは分散・共分散が時間に依存するため、共分散定常とは言えない

$$\text{Corr}(y_t, y_{t+h}) = \sqrt{t/(t+h)}$$

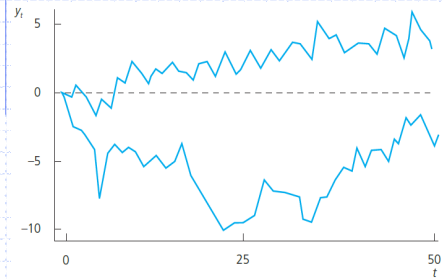
- 観測値間の相関は非常にゆっくりと消失し、これは t の大きさに依存するので、弱従属でもない

入門計量経済学

13

11-3 回帰分析での高持続性時系列

■ ランダムウォークの例: $y_t = y_{t-1} + e_t$



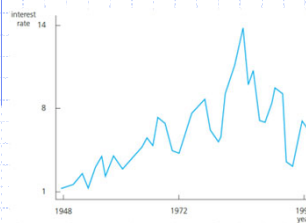
図は、初期値 $y_0 = 0$ 、 $e_t \sim \text{Normal}(0, 1)$ で、コンピュータから生成されたランダムウォークの2つの実測値をプロットしたもの

ランダムウォークは、明確な方向性や長期的なトレンドに戻る傾向がなく、彷徨っている。

14

11-3 回帰分析での高持続性時系列

■ ランダムウォークの例: 3ヶ月国債金利



- ランダムウォークは単位根過程の特殊ケース
- 単位根過程はランダムウォークと定義されるが、 e_t は任意の弱従属過程であってもよい
- 経済学の観点からは、ある時系列が高持続性かどうかを知ることが重要。持続性の高い時系列では、ショックや政策変更が持続的・永続的に影響を与えるが、従属性の弱い過程では、その影響は一過性である

15

11-3 回帰分析での高持続性時系列

■ ドリフト付きランダムウォーク

$$y_t = \alpha_0 + y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow y_t = \alpha_0 t + e_t + e_{t-1} + \dots + e_1 + y_0$$

- ◆ 通常のランダムウォークに加え、各期間での確定的増減 (=ドリフト) が存在

- このため線形時間トレンドが発生し、その周りで系列はランダムウォーク的な変動。ランダムウォークには明確な方向性がないため、トレンドから外れることも。

- ◆ ドリフト付きランダムウォークの性質

$$E(y_t) = \alpha_0 t + E(y_0) \quad \text{Var}(y_t) = \sigma_e^2 t$$

$$\text{Corr}(y_t, y_{t+h}) = \sqrt{t/(t+h)}$$

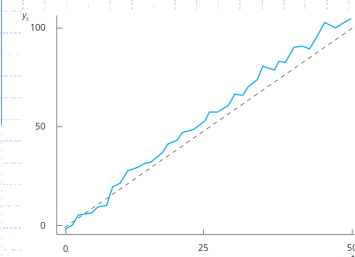
- ドリフトを伴わないランダムウォークと同様、ドリフトを伴うランダムウォークは共分散統計的ではなく、弱従属でもない。

入門計量経済学

16

11-3 回帰分析での高持続性時系列

■ ドリフト付きランダムウォークのサンプル経路



この系列は規則的にトレンドラインに戻っていないことに注意。

ドリフトを伴うランダムウォークは、明らかなトレンドがありながら弱従属でない時系列に適したモデル

入門計量経済学

17

11-3 回帰分析での高持続性時系列

◆11-3c 高持続的な時系列に対する変換

■ 和分の次数

- ◆ 弱従属時系列はゼロ次数 (= $I(0)$) で和分される
- ◆ 時系列が弱従属系列を得るために1回差分する必要がある場合、1次和分 (= $I(1)$) と呼ばれる

■ $I(1)$ 過程の例

- ◆ 弱従属性を実現する方法として差分を取る

$$y_t = y_{t-1} + e_t \Rightarrow \Delta y_t = y_t - y_{t-1} = e_t$$

$$\Delta \log(y_t) \approx (y_t - y_{t-1})/y_{t-1}$$

- ◆ 差分後、得られる系列は弱従属 (e_t が弱従属のため)

18

11-3 回帰分析での高持続性時系列

◆11-3c 時系列がI(1)かどうかの判定

- 単位根検定：時系列がI(1)かどうかを判定する統計的検定（後の章で議論）
- 他に、標本の一次自己相関をチェック
 - ◆ 隣接する時系列の観測値の相関程度を測定

$$\hat{\rho}_1 = \text{Corr}(y_t, y_{t-1})$$
 - 標本一次自己相関が1に近い場合、時系列が高持続的である（＝単位根を含む）可能性を示唆
 - 系列が確定的トレンドを持つ場合も
 - 単位根とトレンドの両方が差分により除去される場合も

19

11-3 回帰分析での高持続性時系列

◆例11.6 出生方程式

$$gfr_t = \alpha_0 + \delta_0 pe_t + \delta_1 pe_{t-1} + \delta_2 pe_{t-2} + u_t$$

- ◆ CLM仮定が成立すればOLSで推定可能だが、この仮定は疑わしく、大規模標本分析に頼らざるを得ない。大規模標本分析のためには、出生率と個人非課税の両系列が定常的&弱従属性でなければならないが、この2つの系列は高持続的であるため、これは疑問である。

$$\hat{\rho}_{gfr} = .977, \hat{\rho}_{pe} = .964$$

- ◆ したがってこの場合、1階階差で推定するのがよい。
 - 方程式がレベルで成立すれば、1階差分でも成り立つ

$$\Delta gfr_t = -.964 - .036 \Delta pe_t - .014 \Delta pe_{t-1} + .110 \Delta pe_{t-2}$$

(0.468) (0.027) (0.028) (0.027)

$$n = 69, R^2 = .233, \bar{R}^2 = .197$$

20

11-3 回帰分析での高持続性時系列

◆例11.7 賃金と生産性

$$\log(hr\text{wage}) = -5.33 + 1.64 \log(out\text{phr}) - .018 t$$

(.37) (.09) (.002)

$$n = 41, R^2 = .971, \bar{R}^2 = .970$$

- 時間当たり賃金と時間当たり生産量（＝生産性）の弾力性は、非現実的なほど大きい
- 両系列とも明確なトレンドを示すため、トレンドを含む
- また、トレンド除去を行っても、両系列とも標本自己相関が1に近いため、1階差分で推定するのが適切

$$\Delta \log(hr\text{wage}) = -.0036 + .809 \Delta \log(out\text{phr})$$

(.0042) (.173)

$$n = 40, R^2 = .364, \bar{R}^2 = .348$$

- このように生産性に対する時間当たり賃金の弾力性を推定することは、より理にかなっている

入門計量経済学

21

11-4 動学完全モデルと無相関係列

◆動学完全モデル

- 十分なラグ変数が説明変数として含まれ、それ以上のラグは従属変数の説明に役立たない場合、モデルは動学的に完全と言われる

$$E(y_t | x_t, y_{t-1}, x_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = E(y_t | x_t)$$

- ◆ 動学的完全性は系列相関がないことを意味する
 - さらにラグが実際に回帰に含まれる場合、その省略は（変数が系列相関を持つ場合）系列相関を引き起こす
- ◆ 動学的完全性を簡単にテストすることができる
 - ラグを排除できない場合は、系列相関があることを示唆

22

11-4 動学完全モデルと無相関係列

◆逐次外生性

- 「十分な」ラグ変数が含まれている場合、説明変数のセットは、逐次外生的と言われる

$$E(u_t | x_t, x_{t-1}, \dots) = E(u_t) = 0, t = 1, 2, \dots$$

- ◆ 逐次外生性は強外生性よりも弱い。
- ◆ 説明変数にラグ付き従属変数が含まれる場合、逐次外生性は動学完全性と同じ
- ◆ Q: 全回帰モデルは動学的に完全であるべきか？
 - A: 必ずしもそうではない。
 - 逐次外生性が成立していれば、因果効果は正しく推定される。系列相関がないことは重要でない。

23