

11 同時方程式モデル

11.1 同時方程式モデル (simultaneous equation) : 構造型

- 同時方程式モデル：相互依存関係を明示する複数個の方程式からなるモデル

・モデルⅠ

$$\begin{aligned} Y_{1i} &= \alpha_1 + \gamma_1 Y_{2i} + u_{1i} \\ Y_{2i} &= \alpha_2 + \gamma_2 Y_{1i} + \beta_{21} X_{1i} + u_{2i} \end{aligned} \quad (11.1)$$

Y—内生変数 endogenous variables (非説明変数として表現される確率変数)

X—外生変数 exogenous variables (被説明変数として表現されない非確率変数)

仮定： $Cov(u_{1i}, u_{2i}) = E(u_{1i}u_{2i}) = \sigma_{12} \neq 0$ (11.2)

- ・「同時」 (連立方程式のように) 係数、外生変数、誤差項のもとで内生変数を同時決定

- 構造型 Structural form：変数間の理論的な相互関係を明示したモデル

・モデルⅡ

$$\begin{aligned} Y_{1i} &= \alpha_1 + \gamma_1 Y_{2i} + \beta_{12} Y_{1i-1} + u_{1i} \\ Y_{2i} &= \alpha_2 + \gamma_2 Y_{1i} + \beta_{21} X_{1i} + u_{2i} \end{aligned} \quad (11.5)$$

・モデルⅢ

$$\begin{aligned} Y_{1i} &= \alpha_1 + \gamma_1 Y_{2i} + u_{1i} \\ Y_{2i} &= \alpha_2 + \gamma_2 Y_{1i} + \beta_{21} X_{1i} + \beta_{22} X_{2i} + u_{2i} \end{aligned} \quad (11.6)$$

- ・先決変数 ラグつき内生変数と外生変数をまとめた呼び方
- ・ゼロ制約 一般的表現(11.7)に対して、(11.1)、(11.5)、(11.6)のような式を導く条件

11.2 構造方程式の識別性

- 識別性問題 identification problem：係数が consistent に推定できるかどうかの問題
- 識別性法則 内生変数 m 個、方程式 m 本
 - ・識別可能 適度識別 just-identified $m-1$ 個の変数が除かれている式
過剰識別 over-identified $m-1$ 個を超える数の変数が除かれている式
 - ・識別不能 under (not)-identified $m-1$ 個未満の変数が除かれている式
 - ・識別性の可否は対象とする方程式内の変数の数とモデル全体の変数の数によって決定
 - ・例——2 内生変数のケース (1 つ以上の変数が除かれていれば、識別可能)
 - モデルⅠ —第 1 式：識別可能、第 2 式—識別不能
 - モデルⅡ —第 1 式：識別可能、第 2 式—識別可能
 - モデルⅢ —第 1 式：(過剰) 識別可能、第 2 式—識別不能

11.3 誘導型

- 誘導型 reduced form 同時方程式モデルを内生変数について解の形で表現した式
- 誘導型と構造型の関係 誘導型においては (データに対応するため) 識別性の問題は生じない
*ある誘導型を満たす構造型は無数に存在

11.4 誘導型の推定と間接最小 2 乗法

- 誘導型の OLS 推定 望ましい性質を持った推定量 (ラグつき内生変数がない場合は BLUE)
- 間接最小 2 乗法 適度識別の場合、誘導型推定値を用いて構造型係数を計算

*この場合も、一致推定量であり、不偏推定量ではない
 識別不能の場合、無数の構造型が対応するため適用不可能
 過剰識別の場合、複数個の表現解が存在するため適用不可能

11.5 構造方程式の2段階最小2乗法

- 構造型の OLS 推定 説明変数と誤差項に相関があるため、適度識別であっても不適切
 - ・例——モデルⅡ第1式（適度識別）の推定

$$Y_{1i} = \alpha_1 + \gamma_1 Y_{2i} + \beta_{12} Y_{1i-1} + u_{1i} \quad (11.34)$$

ここで Y_{2i} の誘導型は $Y_{2i} = f(X_{1i}, Y_{1i-1}, u_{1i}, u_{2i})$ であり、上式の誤差項と相関

→(11.34)の OLS 推定量は不偏性×、一致性×

- 構造型の 2SLS 推定 上記問題の回避のため、操作変数を用いた IV 法、2SLS で推定
 - ・例——モデルⅢの第1式（過剰識別）

$$Y_{1i} = \alpha_1 + \gamma_1 Y_{2i} + u_{1i} \quad (11.37)$$

ここで Y_{2i} の誘導型 $Y_{2i} = \pi_{20} + \pi_{21} X_{1i} + \pi_{22} X_{2i} + v_{2i}$ (11.38)より、 Y_{2i} の推定値を用いて

$$Y_{1i} = \alpha_1 + \gamma_1 \hat{Y}_{2i} + w_{1i} \quad (11.39)$$

ここでの推定量は不偏性×、一致性○

- ・他に制限情報最尤法(LIML)、3段階最小2乗法(3SLS)、完全情報最尤法(FIML)がある

11.6 モデルの解法と政策シミュレーション

- 線型静学モデル 係数推定後、誘導型に外生変数を与えて内生変数値を計算
 - ・内挿 標本期間内についてモデルを解くこと。
 - ・外挿 標本期間外についてモデルを解くこと。予測とも呼ぶ。
- 線型動学モデル
 - ・total test ラグつき内生変数に実績値を入れて内挿
 - ・final test ラグつき内生変数に推定値を入れて内挿（シミュレーションの標準型）
 - ・partial test 個々の推定式のあてはまりを t 検定や R^2 等で check
- 非線型動学モデル final test の場合、内挿値を繰り返し計算（iteration）で算出