

9 攪乱項の系列相関

9.1 系列相関モデルとその影響

- ・ 系列相関 基本モデル $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ (9.1)

- 仮定 5 $Cov(u_i, u_j) = E((u_i - 0)(u_j - 0)) = E(u_i u_j) = 0$

- 系列相関 (serial correlation) とは上の仮定 5 が成り立たないことを指す。
 * 系列相関は一般に時系列データにおいて生じ、横断面データでは生じない
- ・ 原因 ① 習慣性あるいはショックの持続性
 → 分析の時間単位が (月次・四半期など) 短いときに特に生じやすい
 ② 定式化の誤り (例: $Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma Y_{i-1} + v_i$ が真のとき、(9.1) を推定など)

- ・ 問題点 仮定 5 が不成立のケース ($Cov(u_i, u_j) = \sigma_{ij}^2 \neq 0$)

$$Var(\hat{\beta}_{SC}) = \sigma^2 \sum w_i^2 + \sum_{i \neq j} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} + \frac{\sum_{i \neq j} (X_i - \bar{X})(X_j - \bar{X}) \sigma_{ij}}{\{\sum (X_i - \bar{X})^2\}^2}$$

 通常、第 2 項 > 0 であるため、 $Var(\hat{\beta}_{SC}) > Var(\hat{\beta}) \rightarrow t_{SC} < t$ が成り立つ。
 → 系列相関が生じているとき、通常の t 統計量を使うと過大な t を示す
 → 本来有意でない変数を有意と誤認しやすくなる

9.2 攪乱項が 1 階の自己回帰モデル (AR1) に従う場合

- ・ AR1 モデル $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ (9.10a)

- $u_i = \rho u_{i-1} + \varepsilon_i \quad -1 < \rho < 1$ (9.10b)

- * 誤差項の系列相関の多くは AR1 モデルであり、また通常 $0 < \rho < 1$ である

9.3 系列相関の検定: ダービン=ワトソン統計量 (DW)

- ・ 残差分析 攪乱項が AR1 であるかどうかを検定
 $H_0: \rho = 0$ 攪乱項は AR1 ではない → (9.10a) を通常の OLS で推定
 $H_1: \rho \neq 0$ 攪乱項は AR1 に従う → (9.10a) を別の方法で推定

- ・ DW 統計量 $DW = \frac{\sum_2^n (\hat{u}_i - \hat{u}_{i-1})^2}{\sum_1^n \hat{u}_i^2} \approx 2(1 - \hat{\rho})$ (9.14)、(9.15)

- * 一般に $0 < \rho < 1$ と考えられるから、 $0 < DW < 2$ (DW=2 のときは AR1 ではない)
- ・ DW 統計量および検定

AR1	?	AR1 なし
0	d_L	d_U 2

計量経済分析

・代替的方法

1. (9.10a)を回帰し、残差を得る。
2. 残差を用いて(9.10b)を回帰し、係数 ρ について DW-test と同じ帰無仮説で t 検定 (説明変数が誤差項と相関する場合は、(9.10b)に説明変数を加えて回帰)

9.4 推定法：コクラン=オーカット法 (CO)

- ・ $\rho \neq 0$ のとき まず定式化の誤りを検討 → ラグ付き内生変数など
- ・ ρ 既知の場合 (9.10b) の u に (9.10a) をそれぞれ代入

$$(Y_i - \alpha - \beta X_i) = \rho(Y_{i-1} - \alpha - \beta X_{i-1}) + \varepsilon_i$$

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = (\alpha - \rho \alpha) + \beta(X_i - \rho X_{i-1}) + \varepsilon_i \quad i \geq 2 \quad (9.25)$$

ε は回帰の標準的仮定をすべて満たしているため、上式は OLS で回帰可能

- ・ ρ 未知の場合 以下の3段階で推定する (CO 法)

Step1 (9.10a)を OLS で回帰し、残差を求める。

Step2 残差を用いて(9.10b)を OLS で回帰し、係数 ρ を求める。

Step3 推定された ρ を用いて(9.25)を OLS で推定し、 α 、 β を得る

- ・ 推定量の性質 ρ 未知の場合、CO 推定量は不偏推定量ではないが、一致推定量 ← (9.33)

- ・ CO 法の拡張 Prais-Winsten (PW)法 : $i=1$ で(9.10a)の両辺に $(1-\rho^2)^{1/2}$ を乗じたものを使用
iteration : step2 & step3 を推定値が収束するまで繰り返す(iteration)。

9.5 ラグ付き内生変数による系列相関の除去

- ・ 系列相関の除去 定式化の誤り (過小定式化) を改善することで系列相関の除去が可能

- ・ モデル (9.25)を変形 $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 X_{i-1} + \beta_4 Y_{i-1} + \varepsilon_i \quad (9.35)$

$$(9.35)を一般化 \quad Y_i = \alpha + \beta X_i + \rho Y_{i-1} + u_i \quad (9.36)$$

*AR1 モデルは部分調整型のラグ付き内生変数モデルとして表現可能

9.6 ラグ付き内生変数モデルの系列相関の検定

- ・ モデル $Y_i = \alpha + \gamma Y_{i-1} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad (9.37')$

$$u_i = \rho u_{i-1} + \varepsilon_i \quad |\rho| < 1 \quad (9.38)$$

$H_0 : \rho = 0$ 攪乱項は AR1 ではない

$H_1 : \rho \neq 0$ 攪乱項は AR1 に従う (9.39)

*ただし、このモデルでの DW は 2 の方向にバイアスをもつ

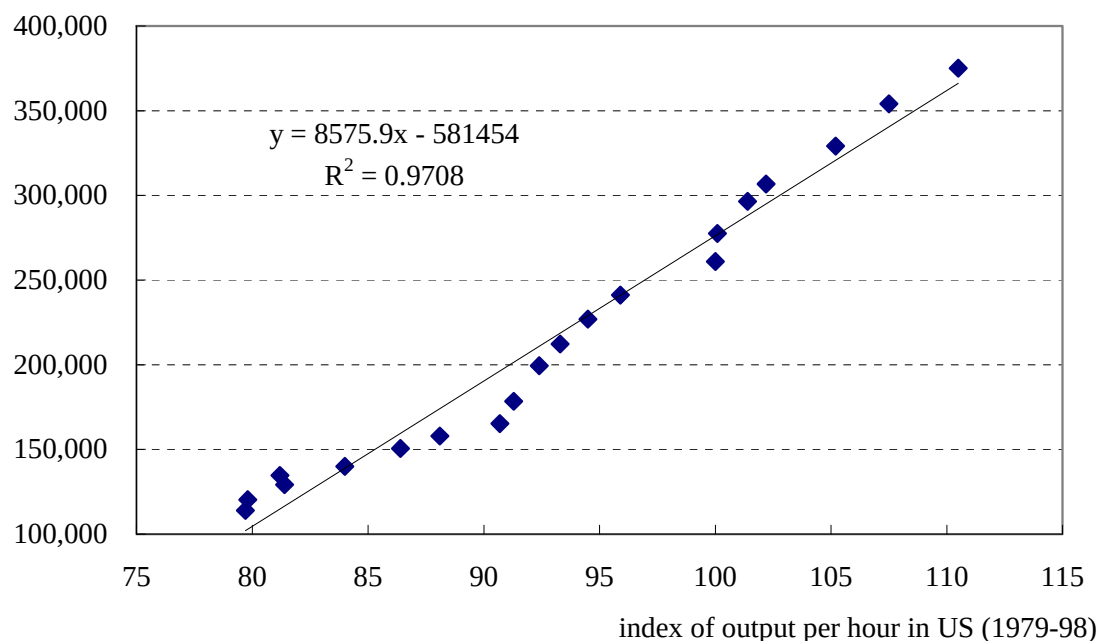
- ・ h 統計量 $h = \hat{\rho} \sqrt{n / (1 - n \cdot \text{Est.Var}(\hat{\rho}))} \sim N(0,1) \quad (9.41)$

- ・ 代替的方法 $\hat{u}_i = \alpha + \gamma Y_{i-1} + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \rho \hat{u}_{i-1} + e_i \quad (9.43)$

このとき ρ の推定値を t 検定 (標準正規分布を使うことも多い)

(参考)

Spurious Regression: real GDP in Mexico (1955-74)



$$Y = -581453.6 + 8575.9X \quad R^2 = 0.97 \quad s = 14510.3$$

$$(-17.68) \quad (24.45) \quad DW = 0.45 \quad n = 20$$

$$Y = -275640.7 + 4652.6X + 6331.6t$$

$$(-1.12) \quad (1.478) \quad (1.254) \quad \text{*カッコ内は} t \text{ 値}$$

このように本来関係のない y と x が高い相関を示すことを「見せかけの相関」という。

定常性 stationary 「見せかけの相関」を回避するには、時間に依存しない「定常性」が重要。
 単位根 unit root 変数の定常性を検定するのが「単位根検定」。ADF-test、PP-test などが代表的。
 共和分 cointegration モデル式の誤差項が定常であれば、 y と x は「共和分関係」にあるといえる。
 共和分検定として、EG-test、Johansen-test が代表的。

- これらの概念を基礎として、時系列分析 Time Series Analysis の分野が発展。代表的なモデルは AR モデルを拡張した VAR(Vector Autoregressive)モデル。
- これらの一連の議論により、(単純な) 時系列データを用いた classical な計量分析が激減し、クロスセクション分析を基礎とするミクロ計量分析が伸張した。