

スペクトル解析（後半） 第 7 回 離散フーリエ変換と高速フーリエ変換の
演習 2015.12.10（第 1 時限）

問題 1 偶対称な周期 N の離散信号、すなわち $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(N - n)$ を満足する実信号の系列の離散フーリエ変換もまた実数値の系列となることを示なさい。

問題 2 以下の 8 個の離散データの離散フーリエ変換を求めなさい。

時間	0	1	2	3	4	5	6	7
時系列	1	0.5	0.25	0	0	0	0.25	0.5

問題 3 $N = 8$ の離散フーリエ変換はベクトル・マトリクスでは

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_8^{0 \cdot 0} & W_8^{1 \cdot 0} & W_8^{2 \cdot 0} & W_8^{3 \cdot 0} & W_8^{4 \cdot 0} & W_8^{5 \cdot 0} & W_8^{6 \cdot 0} & W_8^{7 \cdot 0} \\ W_8^{0 \cdot 1} & W_8^{1 \cdot 1} & W_8^{2 \cdot 1} & W_8^{3 \cdot 1} & W_8^{4 \cdot 1} & W_8^{5 \cdot 1} & W_8^{6 \cdot 1} & W_8^{7 \cdot 1} \\ W_8^{0 \cdot 2} & W_8^{1 \cdot 2} & W_8^{2 \cdot 2} & W_8^{3 \cdot 2} & W_8^{4 \cdot 2} & W_8^{5 \cdot 2} & W_8^{6 \cdot 2} & W_8^{7 \cdot 2} \\ W_8^{0 \cdot 3} & W_8^{1 \cdot 3} & W_8^{2 \cdot 3} & W_8^{3 \cdot 3} & W_8^{4 \cdot 3} & W_8^{5 \cdot 3} & W_8^{6 \cdot 3} & W_8^{7 \cdot 3} \\ W_8^{0 \cdot 4} & W_8^{1 \cdot 4} & W_8^{2 \cdot 4} & W_8^{3 \cdot 4} & W_8^{4 \cdot 4} & W_8^{5 \cdot 4} & W_8^{6 \cdot 4} & W_8^{7 \cdot 4} \\ W_8^{0 \cdot 5} & W_8^{1 \cdot 5} & W_8^{2 \cdot 5} & W_8^{3 \cdot 5} & W_8^{4 \cdot 5} & W_8^{5 \cdot 5} & W_8^{6 \cdot 5} & W_8^{7 \cdot 5} \\ W_8^{0 \cdot 6} & W_8^{1 \cdot 6} & W_8^{2 \cdot 6} & W_8^{3 \cdot 6} & W_8^{4 \cdot 6} & W_8^{5 \cdot 6} & W_8^{6 \cdot 6} & W_8^{7 \cdot 6} \\ W_8^{0 \cdot 7} & W_8^{1 \cdot 7} & W_8^{2 \cdot 7} & W_8^{3 \cdot 7} & W_8^{4 \cdot 7} & W_8^{5 \cdot 7} & W_8^{6 \cdot 7} & W_8^{7 \cdot 7} \end{bmatrix}$$

で与えられる。このとき、以下の設問に答えなさい。

(1) ビットリバースにより周波数系列 $\{X(n)\}_{n=0}^7$ を

$$\begin{aligned} & [X(0), X(4), X(2), X(6) | X(1), X(5), X(3), X(7)] \\ & = [x(0), x(1), x(2), x(3) | x(4), x(5), x(6), x(7)] \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と並び替えたとき、 8×8 の行列の各ブロック (4×4) 行列の形を求めなさい。
そのとき、各ブロック行列の特徴を調べなさい。

(2) 以下のようなベクトルを定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{4+} &= [p_{4+}(0), p_{4+}(1) | p_{4+}(2), p_{4+}(3)] \\ &:= [x(0) + x(4), x(1) + x(5) | x(2) + x(6), x(3) + x(7)] \\ \mathbf{p}_{4-} &= [p_{4-}(0), p_{4-}(1) | p_{4-}(2), p_{4-}(3)] \\ &:= [W_8^0\{x(0) - x(4)\}, W_8^1\{x(1) - x(5)\} | W_8^2\{x(2) - x(6)\}, W_8^3\{x(3) - x(7)\}] \end{aligned}$$

このとき、次の各ブロック行列 (2×2) はどのようにになるか調べなさい。

$$[X(0), X(4) \mid X(2), X(6)] = \mathbf{p}_{4+} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

$$[X(1), X(5) \mid X(3), X(7)] = \mathbf{p}_{4-} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}$$

(3) これまでの計算過程と教科書の図 5.7 との対応関係を調べ、FFT の乗算回数が簡略化できることを説明しなさい。

問題 4 高速フーリエ変換による離散フーリエ変換の外部関数を C プログラムにより作成した。この関数が

```
void fft(int n, double *rex, double *imx)
```

で与えられている。この関数を用いて、逆離散フーリエ変換を求める C プログラムを作成しなさい。ただし、

n : データ長 rex : データの実数部ベクトル imx : データの虚数
部ベクトル

とする。

(以 上)