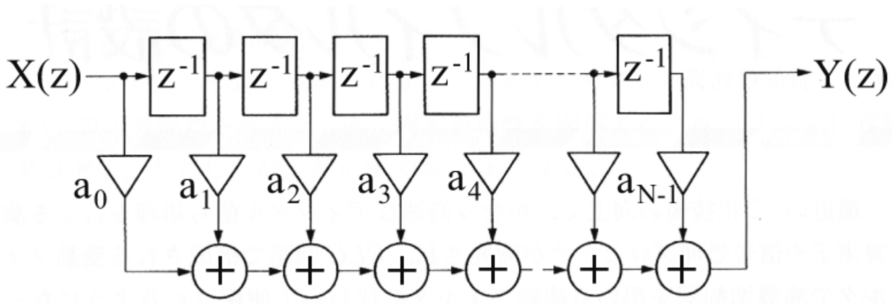
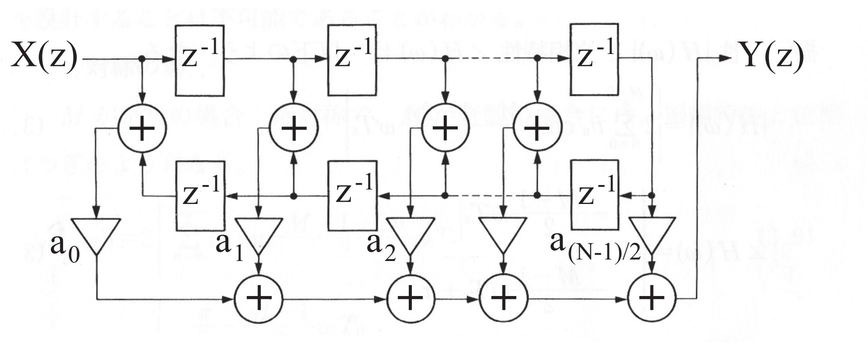
スペクトル解析（後半） 第 11 回演習問題解答　2016.1.7 第 2 時限

問題 1 の解答

(1) この FIR フィルタの回路図を直接形で表現した場合、次の図のように乗算器は N 個必要となる。



教科書 124 ページ の式 (6.8) から、乗算器を共通で利用することができる。回路図の例を以下に示す。



問題 2 の解答　インデックスが変わること以外は教科書 125 ページの例題 6.2

と同じである。すなわち周波数伝達関数は

$$H(e^{j\omega T}) = e^{j(-\frac{N-1}{2}\omega T + \frac{\pi}{2})} \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} 2a_{\frac{N}{2}-i} \sin(i\omega T)$$

となる。左辺最初の係数は回転子で単位円なので、振幅応答は

$$\left|H(e^{j\omega T})\right| = 2\left|\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} a_{\frac{N}{2}-i} \sin(i\omega T)\right|$$

となる。また位相応答は、上記が実数値をとることに注意すれば、下記のようになる。

$$\theta(\omega T) = \begin{cases} -\frac{N-1}{2}\omega T + \frac{\pi}{2} & \text{if } \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} a_{\frac{N}{2}-i} \sin(i\omega T) > 0 \\ -\frac{N-1}{2}\omega T + \frac{3\pi}{2} & \text{if } \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} a_{\frac{N}{2}-i} \sin(i\omega T) < 0 \end{cases}$$

このことから、タップ数 N が偶数でインパルス応答が奇対称となる FIR フィルタも直線位相を持つことになる。また振幅応答からは、このフィルタで低域フィルタを構成することはできないことがわかる。

問題 3 の解答

(1) 教科書 124 ページ式 (6.9) より、振幅応答は

$$M(\omega) = \sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}} \alpha(i) \cos(i\omega T)$$

となる。ただし

$$\alpha(i) = \begin{cases} a_{\frac{N-1}{2}} & i = 0 \\ 2a_{\frac{N-1}{2}-i} & i \neq 0 \end{cases}$$

とする。このとき、$M(\omega)$ は $\cos(\omega T)$ に関する $(N-1)/2$ 次の多項式で次のように書き換えが可能である。

$$M(\omega) = \sum_{i=0}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{\alpha}(i) \left(\cos(\omega T)\right)^i$$

これを ω に関して微分をとると

$$\frac{dM(\omega)}{d\omega} = -T(\sin(\omega T)) \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} i\tilde{\alpha}(i) \left(\cos(\omega T)\right)^{i-1}$$

となる。上式から、周波数区間 $[0, \omega_s/2]$ に存在する極値は、$\sin(\omega T)$ の項に関しては、$\omega = 0, \omega_s/2$ の 2 個を有する。さらに $\cos(\omega T)$ の多項式においては、その最高次数が $(N-1)/2-1$ であるので、最大で $(N-1)/2-1$ 個の異なった極値が存在する。また、カットオフ周波数 ω_c および阻止域周波数 ω_p でも極値が存在するので、振幅応答は全体として最大 $(N-1)/2+3$ 個の極値（リプル数）を有することになる。

(2) 交番定理を満足しているので、この LPF は等リプルといえる。この図では $\omega = 0, \omega_s/2$ のどちらにも極値が存在し、10 個の極値がある。したがって

$$\frac{N-1}{2} + 3 = 10$$

となり、このフィルタのタップ数は $N = 15$ となる。