

問題 1 の解答

(1) 回路構成から

$$y(nT) = x(nT) - x((n-1)T) + 2x((n-2)T)$$

となる。

(2) z 変換を適用すれば

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z) - z^{-1}X(z) + 2z^{-2}X(z) \\ &= (1 - z^{-1} + 2z^{-2})X(z) \end{aligned}$$

となるので、伝達関数は

$$H(z) = 1 - z^{-1} + 2z^{-2}$$

となる。

(3) 周波数応答関数は

$$H(e^{j\omega T}) = 1 - \cos(\omega T) + 2\cos(2\omega T) + j(\sin(\omega T) - 2\sin(2\omega T))$$

となるので、振幅特性および位相はそれぞれ下記のようになる。

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega T})| &= \sqrt{8\cos^2(\omega T) - 6\cos(\omega T) + 2} \\ \theta(\omega) &= \tan^{-1} \left(\frac{\sin(\omega T) - 2\sin(2\omega T)}{1 - \cos(\omega T) + 2\cos(2\omega T)} \right) \end{aligned}$$

問題 2 の解答

(1) 回路構成から

$$y(nT) = x(nT) + py((n-1)T)$$

となる。

(2) z 変換を適用すれば

$$Y(z) = X(z) + pz^{-1}Y(z)$$

となるので、伝達関数は

$$H(z) = \frac{1}{1 - pz^{-1}} \left(= \frac{z}{z - p} \right)$$

となる。

(3) 振幅特性および位相はそれぞれ下記のように導出できる。

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega T})| &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2p\cos(\omega T) + p^2}} \\ \theta(\omega) &= -\tan^{-1} \left(\frac{p\sin(\omega T)}{1 - p\cos(\omega T)} \right) \end{aligned}$$

(4) このシステムが安定であるためには $|p| < 1$ であることが必要である。

問題 3 の解答

いま、 $x((n+s)T)$ の z 変換を $\tilde{X}(z)$ とすると、 z 変換の性質より

$$\tilde{X}(z) = z^s X(z)$$

を得る。したがって、周波数領域の特性が

$$\tilde{X}(e^{j\omega T}) = e^{j\omega Ts} X(e^{j\omega T})$$

となることから、

$$\begin{aligned} |\tilde{X}(e^{j\omega T})| &= |X(e^{j\omega T})| \\ \theta(\omega) &= \angle(e^{j\omega Ts}) + \angle X(e^{j\omega T}) \\ &= \omega Ts + \angle X(e^{j\omega T}) \end{aligned}$$

したがって、時間シフトによって生ずる影響は位相のみであることがわかる。

問題 4 の解答

(1) 理想フィルタのスペックから

$$\omega_c T = \frac{2\pi f_c}{f_s} = 0.2\pi$$

となるので、近似した離散時間システムのインパルス応答は以下になる。

$$\tilde{h}(nT) = \begin{cases} \sin(0.2n\pi)/n\pi & n = -M, -M+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, M \\ 0 & (\text{Otherwise}) \end{cases}$$

(2) 因果性を満たすには、

$$\tilde{h}_{\text{causal}}(nT) = 0 \quad \text{for } n < 0$$

となればよいので、

$$\tilde{h}_{\text{causal}}(nT) = \tilde{h}((n-M)T)$$

とすればよいことがわかる。

(3) 周波数応答関数は教科書の表 5.2 の公式を用いれば

$$\tilde{H}_{\text{causal}}(e^{j\omega T}) = DTFT\{\tilde{h}((n-M)T)\} = \tilde{H}(e^{j\omega T}) e^{-jM\omega T}$$

となる。したがって、

$$|\tilde{H}_{\text{causal}}(e^{j\omega T})| = |\tilde{H}(e^{j\omega T})|$$

となって、振幅応答は変化せず、また位相応答は元がゼロ位相であることを考慮すれば

$$\tilde{\theta}_{\text{causal}}(\omega T) = -M\omega T$$

となって $M\omega$ の位相遅延が生じる。群位相遅延は

$$\tau(\omega T) = -\frac{d\theta(\omega T)}{d(\omega T)} = M$$

となり、 ω について線形位相特性を持つので、このフィルタが無歪みフィルタであることがわかる。

(以上)