**スペクトル解析（後半）第 7 回 演習問題解答　2015.12.10 第 1 時限**

**問題 1 の解答**　偶対称 $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(N-n)$ を利用して定義にもとづき計算します。

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(k) &= \tilde{x}(0) + \sum_{n=1}^{[(N-1)/2]} \left\{ \tilde{x}(n) \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{N}\right) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{x}(N-n) \exp\left(-j\frac{2\pi k(N-n)}{N}\right) \right\} \\
&\quad + \tilde{x}([N/2]) \cos k\pi \\
&= \tilde{x}(0) + 2 \sum_{n=1}^{[(N-1)/2]} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + \tilde{x}([N/2]) \cos k\pi
\end{aligned}$$

なお $[\cdot]$ はガウス記号を示しています。これにより周波数も実数値をとることがわかります。

**問題 2 の解答**　8 個の離散フーリエ変換をそのまま適用すると下記のようになります。

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{7} x(n) \exp\left(-j\frac{2\pi kn}{8}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\exp\left(-j\frac{k\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\exp\left(-j\frac{k\pi}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}\exp\left(-j\frac{3k\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-j\frac{7k\pi}{4}\right) \\
&= 1 + \cos\frac{k\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{k\pi}{2} \quad \text{for } k = 0, 1, \cdots, 7
\end{aligned}$$

**問題 4 の解答**　各ブロック行列は下記のようになります。

$$A_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & W_8^2 & -W_8^2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -W_8^2 & W_8^2 \end{array}\right] \quad A_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ W_8 & -W_8 & W_8^3 & -W_8^3 \\ \hline W_8^2 & W_8^2 & -W_8^2 & -W_8^2 \\ W_8^3 & -W_8^3 & W_8 & -W_8 \end{array}\right]$$

$$A_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & W_8^2 & -W_8^2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -W_8^2 & W_8^2 \end{array}\right] \quad A_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -W_8 & W_8 & -W_8^3 & W_8^3 \\ \hline -W_8^2 & -W_8^2 & W_8^2 & W_8^2 \\ -W_8^3 & W_8^3 & -W_8 & W_8 \end{array}\right]$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ W_8^2 & -W_8^2 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -W_8^2 & W_8^2 \end{bmatrix}$$

また

$$B_i = C_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

が成立することがわかります。

**問題４の解答**　$DFT\{\cdot\}$ の計算を実数部と虚数部に分けて考えてみましょう。

$$\begin{aligned}
X(k) &= Re\{X(k)\} + jIm\{X(k)\} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ x(n) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - jx(n) \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right\} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \left( Re\{x(n)\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + Im\{x(n)\} \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. +j \left( Im\{x(n)\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - Re\{x(n)\} \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right) \right]
\end{aligned}$$

一方 $DFT^{-1}\{\cdot\}$ の計算は

$$\begin{aligned}
x[n] &= Re\{x(n)\} + jIm\{x(n)\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ X(k) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + jX(k) \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right\} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \left( Re\{X(k)\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - Im\{X(k)\} \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. +j \left[ Im\{X(k)\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + Re\{X(k)\} \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right] \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \left( Re\{X(k)\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + Im\{-X(k)\} \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. -j \left( Im\{-X(k)\} \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - Re\{X(k])\} \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right) \right]
\end{aligned}$$

となります。したがって、処理の類似性から関数の入力に関しては

$$Im\{X(k)\} \quad \longrightarrow \quad -Im\{X(k)\}$$

とし、FFT で変換後の関数に対して

$$Im\{x(n)\} \quad \longrightarrow \quad -Im\{x(n)\}$$

とし、さらにデータ長 $N$ で割ればよいことになります。以下のそのプログラムの概要を示します。

```
void  idft(int n,  double *rex,  double *imx)
{
      int  i;

      for (i = 0;  i < n;  i++)  imx[i] *= -1;
      fft (n, rex, imx);
      for (i = 0;  i < n;  i++) {
            rex[i] /= n;
            imx[i] /= - n;
      }
}
```

（以　上）