

問題 1 の解答

(1) 連続時間信号は

$$x(t) = A \cos(2\pi f_a t) = \frac{A}{2} (e^{j2\pi f_a t} + e^{-j2\pi f_a t})$$

で表される。また標本化された離散時間信号は

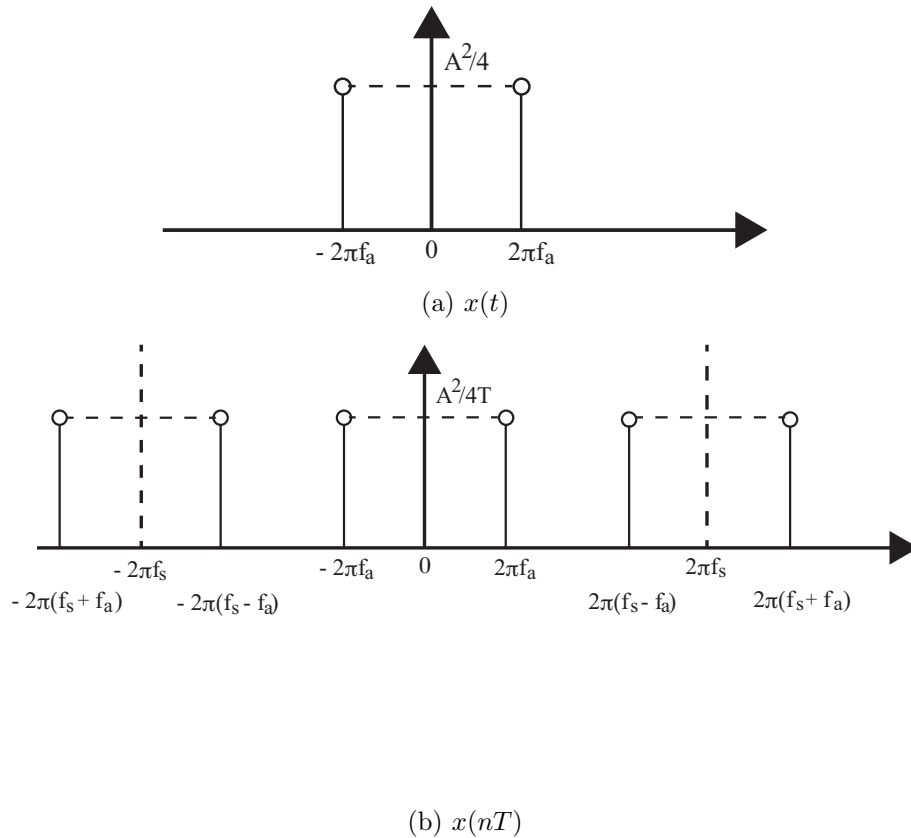
$$x(nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT)$$

であることに留意すれば、複素フーリエ級数によって

$$x(nT) = \frac{A}{2T} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(nf_s + f_a)t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(nf_s - f_a)t} \right\}$$

と表記される。

(2) 下記右図のように、連続時間信号  $x(t)$  のパワースペクトルは下図 (a) のようになる。一方離散時間信号のパワースペクトル密度は下図 (b) のように周期性を有する。



(3) 標本化周波数  $f_s$  は連続信号の最高周波数（この場合  $f_a$ ）に比べて十分大きくしないと折り返し誤差（エイリアシング）が生じるので、スペクトルが重ならないように

$$f_s > 2f_{\max} = 2f_a$$

となるようにすれば元の信号を復元できる（標本化定理）。

## 問題 2 の解答 (教科書 2.1.2 節参照)

(1) 線形性について

$$\begin{aligned} f[ax_1(nT) + bx_2(nT)] &= ax_1(nT) + bx_2(nT) + ax_1(nT - T) + bx_2(nT - T) \\ &= af[x_1(nT) + x_1(nT - T)] + bf[x_2(nT) + x_2(nT - T)] \\ &= ay_1(nT) + by_2(nT) \end{aligned}$$

が成立する。時不変性については

$$\begin{aligned} f[x(nT - kT)] &= x(nT - kT) + x(nT - T - kT) \\ &= y(nT - kT) \end{aligned}$$

となって、これも成立する。

(2) 線形性について

$$\begin{aligned} f[ax_1(nT) + bx_2(nT)] &= nax_1(nT) + nbx_2(nT) \\ &= af[x_1(nT)] + bf[x_2(nT)] \\ &= ay_1(nT) + by_2(nT) \end{aligned}$$

が成立する。時不変性については

$$\begin{aligned} f[x(nT - kT)] &= nx(nT - kT) \\ y(nT - kT) &= (n - k)x(nT - kT) \end{aligned}$$

となって、時不変システムとはならない。

## 問題 3 の解答 (教科書 2.1.4 節参照)

(1) このシステムは線形時不変特性を有する。インパルス応答は

$$h(nT) = \begin{cases} 0.5 & (n = 0, 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となるので、 $n < 0$  において  $h(nT) = 0$  となり、因果性が成立する。

(2) このシステムは時不変とはならない。例えば  $nT = 0$  のとき

$$y(0) = 0.5x(0) - 0.5x(T)$$

となり、出力  $y(0)$  が未来の信号  $x(T)$  に依存してくるので、因果性を満たさない。

## 問題 4 の解答 (教科書 2.4 節参照)

いま、 $x[n + s]$  の  $z$  変換を  $\tilde{X}(z)$  とすると、 $z$  変換の性質より

$$\tilde{X}(z) = z^s X(z)$$

を得る。したがって、周波数領域の特性が

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = e^{j\omega s} X(e^{j\omega})$$

となることから、

$$\begin{aligned} |\tilde{X}(e^{j\omega})| &= |X(e^{j\omega})| \\ \angle \tilde{X}(e^{j\omega}) &= \angle(e^{j\omega s}) + \angle X(e^{j\omega}) \\ &= \omega s + \angle X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

したがって、時間シフトによって生ずる影響は位相のみであることがわかる。

#### 問題 5 の解答 (教科書 2.4.3 節参照)

(1) このシステムを差分方程式で表すと

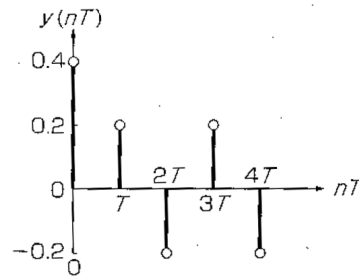
$$y(nT) = 0.5x(nT) - 0.5x(nT - T)$$

となる。インパルス応答は  $x = \delta(nT)$  の出力応答に相当するので

$$h(nT) = \begin{cases} 0.5 & (n = 0) \\ -0.5 & (n = 1) \\ 0 & (n = 2, 3, \dots) \end{cases}$$

となる。

(2)



出力信号  $y(nT)$

#### 問題 6 の解答 (教科書 2.3 節参照)

単純な複素演算をすることで、下記が求まる。

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T}) &= \frac{Y(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T})} \\ &= \frac{(Y^R(\omega) + jY^I(\omega))(X^R(\omega) - jX^I(\omega))}{(X^R(\omega))^2 + (X^I(\omega))^2} \\ &= \frac{Y^R(\omega)X^R(\omega) + Y^I(\omega)X^I(\omega)}{(X^R(\omega))^2 + (X^I(\omega))^2} + j \frac{Y^I(\omega)X^R(\omega) - Y^R(\omega)X^I(\omega)}{(X^R(\omega))^2 + (X^I(\omega))^2} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} H^R(\omega) &= \frac{Y^R(\omega)X^R(\omega) + Y^I(\omega)X^I(\omega)}{(X^R(\omega))^2 + (X^I(\omega))^2} \\ H^I(\omega) &= \frac{Y^I(\omega)X^R(\omega) - Y^R(\omega)X^I(\omega)}{(X^R(\omega))^2 + (X^I(\omega))^2} \end{aligned}$$

を得ます。以上の結果から振幅特性は

$$|H(e^{j\omega T})| = \sqrt{\{Y^R(\omega)\}^2 \{X^R(\omega)\}^2 + \{Y^I(\omega)\}^2 \{X^I(\omega)\}^2 + \{Y^I(\omega)\}^2 \{X^R(\omega)\}^2 + \{Y^R(\omega)\}^2 \{X^I(\omega)\}^2} \\ \times [\{X^R(\omega)\}^2 + \{X^I(\omega)\}^2]^{-1}$$

位相特性は

$$\theta(\omega T) = \angle H(e^{j\omega T}) \\ = \arctan \left( \frac{Y^I(\omega)X^R(\omega) - Y^R(\omega)X^I(\omega)}{Y^R(\omega)X^R(\omega) + Y^I(\omega)X^I(\omega)} \right)$$

となる。

(以 上)