変則じゃんけんの動学均衡

宮　　川　　栄　　一

国民経済雑誌　第200巻　第6号　抜刷

平 成 21 年 12 月

変則じゃんけんの動学均衡

宮　　川　　栄　　一*

じゃんけんはゲーム理論の応用例として頻繁に取り上げられる。そこでの分析に共通する点は，じゃんけんを静学ゲームとして取り扱っていることである。じゃんけんを一回限りの選択として分析しているのである。一方，じゃんけんには「あいこ」があり，あいこになると再度じゃんけんが行われるのが普通である。したがって，決着がつくまでのプロセス全体は動学的なゲームとなる。本稿では，じゃんけんを素直に描写した動学ゲームを分析する。動学分析が違いをもたらすのはプレーヤー間に非対称性がある変則じゃんけんなので，そうしたじゃんけんを一つ取り上げて詳細に分析する。

キーワード　　じゃんけん，ゲーム理論

1　は　じ　め　に

じゃんけんはゲーム理論の応用例としてよく取り上げられる。ナッシュ均衡の理論を使って簡単な計算をすれば，均衡行動はグー・チョキ・パーを等確率で出すことだと証明できる。通常のじゃんけんだけでなく，ルールを少し変えた変則的なじゃんけんもバリエーションとしてよく取り上げられる[1)]。

こうしたじゃんけんのゲーム理論的分析には一つの共通点がある。それは，じゃんけんを一回限りの選択と見なしていることである。ゲーム理論の基本形である同時手番ゲーム（戦略形ゲーム）の応用例としてじゃんけんを分析しているのである。

一方，通常のじゃんけんでは一回で決着がつくとは限らない。あいこの場合には再度じゃんけんが行われるのが普通である。当然ながら一回のじゃんけんで決着がつく場合もあるが，必ず一回で決着がつくわけではない。したがって，じゃんけんを素直にモデル化すると，同時手番ゲームではなく動学ゲームになる。毎回のじゃんけんは同時手番だが，引き分けの場合にはゲームが続行するので，決着がつくまでのプロセス全体は動学的なゲームになる[2)]。

そこで，本論文はじゃんけんを素直に描写した動学ゲームを分析する。動学ゲームの分析が違いをもたらすのはプレーヤー間に非対称性がある変則的なじゃんけんなので，そうした変則じゃんけんを一つ取り上げ，その分析を詳細に行う。動学分析と静学分析とで結果が大

きく異なることが示される。

じゃんけんはゲーム理論を検証する上で有益だと考えている。現実経済の複雑なゲームと違い，ルールも結果も簡単明瞭で，モデル化が容易である。最近ではテニスのサーブ・レシーブやサッカーのペナルティーキックがゲーム理論の（特に混合戦略均衡の）検証研究として経済学者の注目を集めているが[3]，じゃんけんも同様に良質な素材だと考えている。

2　普通のじゃんけんの静学分析

まずは普通のじゃんけんの教科書的な分析から始める。プレーヤーは２人でＡとＢと呼ぶ。利得表は

		B グー	B チョキ	B パー
A	グー	0,　0	1，－1	－1,　1
A	チョキ	－1,　1	0,　0	1，－1
A	パー	1，－1	－1,　1	0,　0

で与えられる。プレーヤーＡが横の一行を選び，プレーヤーＢは縦の一列を選ぶ。マスの中に２つの数字が書かれているが，左の数字はプレーヤーＡの効用（利得）を表し，右の数字はプレーヤーＢの効用を表す。例えば，Ａがグーを選んでＢがチョキを選んだ場合，結果は最上段の中央のマスになる。したがって，グーを選んだＡの効用は１，チョキを選んだＢの効用は－１となる[4]。

このゲームの均衡を計算する。均衡とはプレーヤーＡの戦略 s_A とプレーヤーＢの戦略 s_B の組合せ（s_A，s_B）のうち，たとえその戦略の組合せでお互いがプレーすると分かっていても，どちらも自分の戦略を変更したいと思わないものを言う。つまり，お互いが自分の効用を最大にしている戦略の組合せである。ゲーム理論でナッシュ均衡と呼ばれているものである。

均衡の定義のなかで「戦略」という言葉を使ったが，戦略とはグー・チョキ・パーを出す割合のことである（混合戦略)。たとえば，1/3 ずつの確率で出すというのは一つの戦略である。グー・チョキ・パーを１：２：１の割合で出すのも（賢いかどうかはともかく）可能な戦略の一つである。

各プレーヤーの戦略をひとつ固定しても勝敗は確率的に決まるので，効用の実現値も確率的に決まる。したがって，確率的に決まる効用をどうやって最大化するのかという問題が出てくるが，通常の経済学では効用の期待値（期待効用）を最大にすると考えるので，ここで

もそれを踏襲する。

これらのことを踏まえると，上記のじゃんけんについては，２人とも等確率でグー・チョキ・パーを出すことが均衡だと分かる。実際，相手が等確率で選んでいると，自分がどの手を出しても効用の期待値は同じである。何を出しても勝ち・負け・あいこが等確率で起こるからである。したがって，どの戦略も期待効用を最大化する。どの戦略でもいいのだから，等確率という特定の戦略も期待効用を最大化する。この議論はどちらのプレーヤーについても成立するので，２人とも等確率で選ぶことは均衡である。

均衡は一つとは限らないので，他の均衡も考える。結論から言えば，普通のじゃんけんに均衡は一つしかない。常識的には当然だが，論理的に示すには次のように考える。

まず，ある特定の手は絶対に出さないというプレーヤーがいる状況は均衡ではないことを示す。例えば，Ａは絶対にグーを出さないという状況は均衡ではない。背理法で示すため，均衡でＡがグーを絶対に出さないと仮定する。すると，Ｂはパーを絶対に出さない。なぜなら，相手がグー以外で来るなら，パーで勝負するよりもチョキで勝負するほうが効用が確実に高くなるからである。表で確かめるとすぐ分かる。したがってＢは絶対にパーを出さない。しかしＢがパーを出さないなら，同じ議論よりＡは絶対にチョキを出さない。議論はここで終わらない。Ａがチョキを出さないなら，Ｂはグーを出さないし，そうするとＡはパーを出さないし，したがってＢはチョキを出さない。結局，だれも何も出さないという矛盾した結論になる。これは議論の出発点である「均衡でＡがグーを絶対に出さない」という仮定が間違っていることを示す。出発点を，違う手や違うプレーヤーに変えても同じである。したがって，均衡において各プレーヤーはすべての手を正の確率で選ぶ。

任意の均衡を考え，Ａがグー・チョキ・パーを出す確率をそれぞれ（g, t, p）で表す。３つとも厳密に正である。この確率を所与とすると，Ｂがグーを出すときのＢの期待効用は

$$g\times 0+t\times 1+p\times(-1)=t-p \qquad \text{（グー）}$$

である。同様に，Ｂがチョキを出すときとパーを出すときのＢの期待効用はそれぞれ

$$g\times(-1)+t\times 0+p\times 1=-g+p \qquad \text{（チョキ）}$$

$$g\times 1+t\times(-1)+p\times 0=g-t \qquad \text{（パー）}$$

となる。

プレーヤーＢはすべての手を正の確率で出すので，この３つの値はすべて等しい。実際，もし等しくなければ，他よりも低い期待効用をもたらす手があることになる。例えば，グーの期待効用がチョキの期待効用よりも低いとすると，グーの確率をゼロに減らして，その分の確率をチョキに回すことによってＢは自分の期待効用を高めることができる。したがって，期待効用を最大にする戦略ではＢはグーを絶対に出さないことになる。均衡ではどの手も正の確率で出すのだから，すべての手は同じ期待効用をもたらす。

したがって $t-p=-g+p=g-t$ という等式を得る。$g+t+p=1$ を使って計算すると

$$g=t=p=1/3$$

を得る。

以上はＡの戦略についてであったが，Ｂの戦略についても同一の議論が成立する。任意の均衡についてこの議論が成立するので，均衡は一つしかない。

3 変則じゃんけんの静学分析

今度はルールを少し変えた変則的なじゃんけんを考える。まずは標準的な分析を行い，その後にその難点を指摘する。

変則じゃんけんの例として，「プレーヤーＢはパーを出せない」というルールを考える。つまり，Ｂはグーかチョキしか出せない。このルールだとＡの楽勝だということは直感的に明らかだが，均衡が具体的にどうなるか計算したい。このルールは極めて非現実的だが，静学分析と動学分析の違いが劇的に出るので，解説上の例として有用である。

まず大雑把に考える。Ｂはパーを出せないのだから，Ａとしてはグーを出せば負けることはない。しかし，Ａがグーしか出さないと，Ｂはグーで対抗してくるだろう。Ｂがグーしか出さないのであれば，Ａはパーを出して勝ちに行きたい。しかしＡがパーを出す確率が高いと，Ｂがチョキを出してきてＡは負けるかも知れない。

均衡を計算するには前回のように利得表を使う。変則じゃんけんの利得表は３行２列で以下のようになると考える。

		B グー	B チョキ
A	グー	0,　0	1,　−1
	チョキ	−1,　1	0,　0
	パー	1,　−1	−1,　1

これは前回の利得表の一番右の列を削除したものである。前節の議論をなぞるように均衡を導出する。

まず，Ａはチョキを出さないことが分かる。前節と同様，Ｂはパーを出さないのだから，Ａにとってはチョキを出すよりグーを出す方が効用は確実に高くなる。

一方，先程と違って議論の連鎖はここで止まる。Ａがチョキを出さないからといって，Ｂがグーを出さないとは言えない。先程と違いＢはパーを出せないので，Ｂにとってグーは悪い手ではない。実際，Ａが高い確率でグーを出すのであれば，Ｂはチョキではなくグーを出

すべきである。

したがって，今のところ分かっているのは「Ａがチョキを出さない」ということである。つまり，出すかもしれない手はどちらのプレーヤーについても２種類である。

簡単なことだが，１種類の手しか出さないプレーヤーがいる状況は均衡にならない。実際，Ａがグーしか出さないとすると，Ｂはグーしか出さないし，そうするとＡはパーを出すべきである。Ａがパーしか出さないとすると，Ｂはチョキしか出さないし，そうするとＡはグーを出すべきである。となって堂々巡りになる。したがって，Ａはグーもパーも正の確率で選ぶし，Ｂはグーもチョキも正の確率で選ぶ。

Ａがグーとパーを選ぶ確率を（g_A，p_A）と書く。すると，Ｂがグーを出せばＢの期待効用は

$$g_A \times 0 + p_A \times (-1) = -p_A \qquad \text{（グー）}$$

となる。Ｂがチョキを出せばＢの期待効用は

$$g_A \times (-1) + p_A \times 1 = -g_A + p_A \qquad \text{（チョキ）}$$

となる。Ｂはどちらの手も正の確率で選ぶので，どちらも同じ期待効用をもたらすはずである。これは先程の議論と同じである。したがって $-p_A = -g_A + p_A$ つまり $g_A = 2p_A$ である。つまりＡはグー・チョキ・パーを２：０：１の割合で選ぶ。

今度は，Ｂがグーとチョキを選ぶ確率をそれぞれ（g_B，t_B）で表す。このとき，Ａがグーを選んだときとパーを選んだときのＡの期待効用はそれぞれ

$$g_B \times 0 + t_B \times 1 = t_B \qquad \text{（グー）}$$

$$g_B \times 1 + t_B \times (-1) = g_B - t_B \qquad \text{（パー）}$$

となる。この２つも均等化されているので，$t_B = g_B - t_B$ つまり $2t_B = g_B$ である。したがって，Ｂはグーとチョキを２：１の割合で選ぶ。

均衡では 4/9 の確率でＡが勝ち，1/9 の確率でＢが勝ち，4/9 の確率で引き分けになる。均衡での期待効用を計算すると，Ａについては 1/3，Ｂについては－1/3 である。

4　静学分析の難点

前節の分析では変則じゃんけんを一回限りのゲームとして考えた。ここではその分析方法の難点を指摘する。「はじめに」にも書いたように，あいこの場合には再度じゃんけんをするのが普通なので，一度何かを選択すれば終わりというわけではない。具体的に今までの分析のどこが問題かと言えば，あいこの場合の効用がゼロに設定されていることである。一回じゃんけんをしてあいこだった場合の効用が，２人ともゼロに設定されているのである。しかし，あいこになれば再度じゃんけんを行うので，あいこの効用がゼロという必然性はない。

特に，２人とも同じ効用を得るのは不自然である。いま考えている変則じゃんけんではＡが圧倒的に有利である。したがって，あいこの効用もＡの方が高いと考えられる。では，あいこの効用をいくらに設定すればよいか。

あいこの場合のＡの効用をＢより高くすればいいという単純な話ではない。直感的に考えると，結局Ａの勝利で決着するのはほぼ間違いないのだから，あいこでもＡの効用は（最大値である）１に近いと考えられる。と言っても，あいこの場合のＡの効用を１に近い数字に決めてしまっていいだろうか。

あいこの効用をなんらかの数値に決めてしまうのは問題である。あいこの効用というのは，分析することによって初めて分かる値（内生変数）だからである。あいこということを具体的に考えれば簡単に分かる。あいこになるということは，勝負については何も起こらないことに等しい。あいこになれば再度じゃんけんを行うのだから，２回目のじゃんけんを行う前の状況は，１回目のじゃんけんの前の状況と同じである。あいこになったからといって，どちらかが有利になったりするわけではない。勝負の状況は同じである。したがって，あいこの場合の期待効用というのは，１回目のじゃんけんをする前の段階で予想される期待効用に等しいと考えられる。どちらも，勝負をすることで得られる効用の期待値である。それはまさにゲーム理論を使って計算しようとしている値である。人為的に決める値ではない。

次の節からはこの値を実際に計算する。ゲーム理論の用語を使えば，次節から行う分析というのは，あいこになれば再度じゃんけんが行われるという無限期の展開形ゲームを考え，その部分ゲーム完全均衡を計算することである。[5)]

5　変則じゃんけんの動学分析：基本モデル

いよいよここから変則じゃんけんを動学的なゲームとして分析する。まずは最も簡単なモデルから始め，後ほどその変形と一般化を考える。

基本モデルの動学分析は次の利得表で行う。

		B グー	B チョキ
A	グー	δV_A，δV_B	1，-1
A	チョキ	-1，1	δV_A，δV_B
A	パー	1，-1	-1，1

ここで V_i（$i=A$，B）は，決着がつくまでじゃんけんを行うことでプレーヤー i が獲得する効用の期待値である。この値があいこの効用を決定することは前節で説明したとおりである。

ただ，上の表ではあいこの効用が δV_i となっていて，δ という値が掛けてある。この値は割引因子（discount factor）とよばれるもので，$0 \leq \delta < 1$ である。あいこは勝負としては何も起こらないに等しいが，物理的には僅かながら時間を消費する。勝負としては同じ結果でも，時間がかかると効用を割り引くのが経済学の標準なので，ここでもそれを踏襲する。つまり，第１回じゃんけんであいこになった時点で評価する期待効用は V_i で，それを第１回じゃんけんをする前の時点（現在時点）で評価すると δV_i となる[6]。「第１回」というのを「第 k 回」に置き換えても同じである。あいこで経過する時間は秒単位と短いので，δ はほぼ１と考えてよい。ここでは議論を簡単にするため $\delta < 1$ と仮定するが，後でモデルを一般化するときには $\delta = 1$ の場合も含める。

まず，Ａはチョキを出さないことを示す。実際，V_A は最高で１，最低で -1 なので，$-1 < \delta V_A < 1$ である。したがって，チョキを出すよりグーを出す方がＡの効用は確実に高くなる。

何かの手を確率１で出すプレーヤーがいる状況は均衡にならない。前節と同様，Ａがグーを確率１で出す→Ｂはグーを確率１で出す→Ａはパーを確率１で出す→Ｂはチョキを確率１で出す→Ａはグーを確率１で出す，という堂々巡りになるからである。したがって，Ａはグーもパーも正の確率で出し，Ｂはグーもチョキも正の確率で出す。

Ａがグーを出す確率を g_A と書く（$0 < g_A < 1$）。Ｂはグーを出してもチョキを出しても同じ期待効用を得るので

$$g_A \delta V_B - (1 - g_A) = -g_A + (1 - g_A) \tag{1}$$

という等式を得る。これを書き直すと $g_A(\delta V_B + 3) - 2 = 0$ となる。g_A について解くと

$$g_A = \frac{2}{3 + \delta V_B} \tag{2}$$

となる。さて，次の点が重要なのだが，（１）式の両辺の値は V_B に等しい。これがじゃんけんをすることでＢが得る期待効用だからである。式で書くと

$$V_B = -g_A + (1 - g_A)$$

である（ここでは（１）の右辺を使ったが，左辺を使っても同じである）。この式に先ほど求めた g_A を代入すると

$$V_B = -\frac{4}{3 + \delta V_B} + 1$$

を得る。整理すると $\delta V_B^2 + (3 - \delta) V_B + 1 = 0$ という２次方程式を得る。解の公式より

$$V_B = \frac{\delta - 3 \pm \sqrt{(1 - \delta)(9 - \delta)}}{2\delta}$$

となる。小さい方の解は -1 未満であり，V_B は最低でも -1 以上なので，大きい方の解が求

める値である。つまり

$$V_B=\frac{\delta-3+\sqrt{(1-\delta)(9-\delta)}}{2\delta}$$

である。$-1<V_B<0$ であり，δ が１に近づくにつれ V_B は-1に単調に収束する。

V_B を（２）に代入すると

$$g_A=\frac{4}{3+\delta+\sqrt{(1-\delta)(9-\delta)}}$$

となる。$0<g_A<1$ であり，δ が１に近づくにつれ g_A は１に単調収束する。つまり，プレーヤーＡはほぼ１に近い確率でグーを出し，残りの僅かの確率でパーを出す。

次に，Ｂがグーを出す確率を g_B と書く。Ａはグーでもパーでも同じ期待効用を得るので

$$g_B\delta V_A+(1-g_B)=g_B-(1-g_B) \qquad (3)$$

である。g_B について解くと

$$g_B=\frac{2}{3-\delta V_A} \qquad (4)$$

となる。先程と同様，（３）の値は V_A に等しいので，$V_A=g_B-(1-g_B)$ である。これに（４）式の g_B を代入して整理すると，$\delta V_A^2+(\delta-3)V_A+1=0$ を得る。解の公式より

$$V_A=\frac{3-\delta-\sqrt{(1-\delta)(9-\delta)}}{2\delta}$$

である。２つの解のうち低い方が求める値である（大きい方は１を超える）。この値は V_B の符号を変えたものに等しい（$V_A=-V_B$）。これはゲームがゼロサムであることの帰結である。また，（４）と（２）より $g_A=g_B$ を得る。つまりグーを出す確率はＡもＢも同じである。

最終的にプレーヤーＡの勝利で決着する確率を K_A とする。Ａが勝つのは２つの場合がある。一つはＡがグーを出してＢがチョキを出す場合で，この確率は一回のじゃんけんにつき $g_A(1-g_B)$ である。もう一つはＡがパーを出してＢがグーを出す場合で，確率は $(1-g_A)g_B$ である。あいこの確率は g_Ag_B なので，最終的にＡが勝つ確率 K_A は

$$K_A=g_A(1-g_B)+(1-g_A)g_B+g_Ag_BK_A$$

で決まる。グーを出す確率は両者で等しいので，それを g と書くと

$$K_A=2g(1-g)+g^2K_A$$

となる。K_A について解くと

$$K_A=\frac{2g}{1+g}=\frac{8}{7+\delta+\sqrt{(1-\delta)(9-\delta)}}$$

となる。

勝負が決まるまでのじゃんけん回数の期待値を T で表す。あいこの確率が g^2 なので $T=1+g^2T$ が成立する。したがって

$$T=\frac{1}{1-g^2}$$

である。

いくつかの δ の値について具体的に計算した結果が次の表である。

δ	（割引因子）	0.7	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.0001
g_A	（グーの確率）	0.7579	0.8333	0.9361	0.9784	0.9930	0.6667
V_A	（期待効用）	0.5157	0.6667	0.8722	0.9567	0.9860	0.3333
K_A	（勝率）	0.8623	0.9091	0.9670	0.9891	0.9965	0.8000
T	（回数）	2.3494	3.2727	8.0837	23.3648	71.7120	1.8000

一番右の列は δ がほぼゼロのケースである。δ がほぼゼロだと，あいこの効用もほぼゼロなので，じゃんけんを一回限りのゲームとして考える静学分析に帰着する。実際，一番右の列の g_A と V_A（グーの確率と期待効用）は第３節の静学分析の結果と一致している。残りの２つの変数（勝率と回数）についても，静学均衡のプレーを決着がつくまで行った場合の値と一致していることが確認できる。

一方，じゃんけんを素直に動学ゲームとしてモデル化すると，じゃんけんのスピードを考えれば，δ は１に近い値と考えられる。したがって，一番右の二列を比べることで，動学分析と静学分析の結果の違いを見ることができる。どの変数についても大きな違いがあることが分かる。

6　じゃんけんのコスト

上の分析では，あいこになるたびに効用を δ で割り引く設定にした。効用を割り引くことは経済学において標準的であることは上でも述べた。しかし，あいこになることで経過する時間は秒単位で非常に短い。これぐらい短いと，時間の経過による効用の割引というのは実感しずらいのではないだろうか。

一方，何回あいこになろうが全く無差別と感じる人も少数派だろう。あいこになることが効用に影響することは間違いなさそうである。そこで，あいこによる影響は時間の経過ではなく，エネルギーの消費からくると考えてはどうだろう。つまり，じゃんけんを一回行うことのコスト・不効用を考えるわけである。何回もあいこになると「面倒だ」という感覚である。時間の経過よりもそうした手間による損失の方が相対的に大きいかもしれない。そこで，本節では割引因子の代わりにじゃんけんのコストを導入して分析する。

じゃんけんを一回するごとに発生するコストを $c>0$ で表す。利得表は下の図のようになる。割引因子の δ がなくなり，その代わり全てのマスで c が引かれている。[7]

		B グー	B チョキ
A	グー	$-c+V_A,\ -c+V_B$	$-c+1,\ -c-1$
A	チョキ	$-c-1,\ -c+1$	$-c+V_A,\ -c+V_B$
A	パー	$-c+1,\ -c-1$	$-c-1,\ -c+1$

まず，前回と同様，Ａがチョキを出さないことを示す。V_A の値に応じて議論が異なる。もし$V_A>-1$ であれば，チョキを出すよりもグーを出すことによってＡの効用は確実に上がる。ここでは V_A が最大でも $1-c$ であることを使っている。一方，もし $V_A<-1$ であれば，チョキを出すよりパーを出す方がＡの効用は確実に上がる。最後に，$V_A=-1$ の場合を考えると，この場合はチョキを出すよりも，グーとパーを五分五分で出すことで期待効用は確実に上がる。実際，チョキを出せば効用は $-c-1$ だが，グーとパーを五分五分で出せば，Ｂがどちらの手を出すとしてもＡの期待効用は $-c$ となり $-c-1$ を上回る。したがって，V_A の値がいくらであっても，Ａにとってチョキを出すことは最適ではない。

前回まではここで誰かが何かの手を確率１で出す場合を議論したが，ここではその議論はスキップして，２人とも確率的に行動する均衡を考える。Ａがグーを出す確率を g_A で表す $(0<g_A<1)$。Ｂはグーでもチョキでも同じ期待効用を得るので

$$-c+g_A V_B-(1-g_A)=-c-g_A+(1-g_A) \tag{5}$$

となる。これを整理すると

$$g_A=\frac{2}{3+V_B}$$

となる。$g_A<1$ なので

$$V_B>-1 \tag{6}$$

を得る。V_B は(５)の両辺の値に等しいので，$V_B=-c-g_A+(1-g_A)$ である。いま計算した g_A を代入して整理すると

$$f(V_B)\equiv V_B^2+(2+c)V_B+1+3c=0 \tag{7}$$

を得る。しかし，計算すると

$$f(-1)=2c>0,\qquad f'(-1)=c>0$$

となる。したがって(７)の解のなかで(６)を満たすものは無い。つまり，２人とも確率的に選択する均衡は存在しない。

では均衡は全く存在しないのだろうか。先程は非確率的な均衡の議論をスキップしたが，そこに議論を戻す。何かの手を確率１で出すプレーヤーがいる均衡は存在するだろうか。消

去法で考える。まず，Aがパーを確率1で出す均衡が存在するか考える。そういう均衡があると仮定してみよう。Aがパーしか出さないのだからBは確実にチョキを出してくる。そうするとAとしてはグーを出す方が賢明であり，これは均衡条件に矛盾する。したがってAが確実にパーを出す均衡は存在しない。次に，Bがグーしか出さない均衡はどうだろう。もしそういう均衡があるとすれば，Aは確実にパーを出しているはずである。しかし，そうするとBはチョキを出すべきで，これも均衡に矛盾する。

残るは，Aがグーしか出さないケースと，Bがチョキしか出さないケースの2つである。まず，Aがグーしか出さないケースを考えてみよう。そういう均衡があると仮定してみる。先程の議論より，Bがグーを確率1で出すという可能性は消去済みなので，言い換えればBはチョキを正の確率で選ぶ。したがって，Bにとってチョキを出すことは期待効用を最大にする一つの手である。すると，Bがじゃんけんをすることで得られる期待効用 V_B の値は $-c-1$ に等しい。したがって，$V_B<-1$ であり，利得表の最上段のBの効用を比較すると，Bとしてはチョキを出す方がグーを出すよりも期待効用が厳密に高くなることが分かる。したがってBはチョキを確率1で出す。つまり，以上の議論をまとめると，Aがグーしか出さない均衡があるとすれば，その均衡でBはチョキしか出さない。

ではその状況が実際に均衡になるかと言えば，なるのである。$V_B=-1-c$ を利得表に代入すると分かるが，Aがグーしか出さないのなら，Bはチョキを出すことが最適だし，Bがチョキしか出さないのなら，Aにとってはグーしか出さないことが最適である。よって，均衡が一つ見つかった。残りのケースはすでに消去済みなので，均衡が一つしかないことも示せた。

つまり，じゃんけんにコストがかかる状況では，Bは勝負をあきらめて一回目からチョキを出して負ける，というのが唯一の均衡である。グーを出して粘ってみても勝ち目は無く，コストだけが積み重なるので，一回目から降参するわけである。もし不戦敗の選択肢があれば，Bは不戦敗を選ぶと予想される。

前節の割引モデルの結果と比較すると面白い。勝敗の確率だけを比べると，Aが勝つ確率がちょうど1なのか近似的に1なのかの違いしかない。一方，勝敗が決まるタイミングは大きく異なる。コストモデルでは一回目のじゃんけんで決着がつくが，割引モデルでは決着がつくまでに何回もあいこが続く。割引因子が0.9999の場合，あいこの回数は平均して70回を超える[8)]。この違いはプレーヤーBの戦略がモデルによって大きく異なることから来る。割引モデルではBはほぼ1の確率でグーを出すが，コストモデルではBはグーを出さない。コストモデルで c がゼロに近い場合と，割引モデルで δ が1に近い場合は，表面的にはほぼ同じようなモデルに見えるのに，理論から導出される行動パターンが大きく異なるのは興味深い。

7　勝敗の効用

これまでの分析では，勝ったときと負けたときの効用をそれぞれ１と−１に設定した。これも極めて標準的な設定である。勝負はゼロサムゲームなのだから，１と−１に効用を設定することは一般性を失わない仮定に思えるかもしれない。実際はどうだろうか。

最初に考えた割引モデルに戻って考えてみる。負けたときの効用は−１であった。この設定では，どうせ負けるのであれば，負けるタイミングは遅い方が望ましい。実際，初回のじゃんけんで負ける場合の効用は−１だが，２回目で負ける場合の効用は$-\delta$なので，$\delta<1$であれば２回目で負ける方が効用は高くなる。じゃんけんに負けると罰が待っている場合を想像すると分かりやすい。罰は出来るだけ先延ばしにしたいと感じるのである。

一方，効用がそれぞれ３と１だとどうだろう。この場合，負けたときの効用が正なので，どうせ負けるなら，負けるタイミングは早い方が望ましい。実際，２回目で負ける場合の効用はδになるので，初回で負ける方が効用は高くなる。このケースは，勝っても負けても褒美をもらえるが，敗者の方が褒美が小さくなるという場合である。褒美は早く受け取りたいので，どうせ負けるならすぐに負ける方が嬉しいのである。

この例から分かるように，効用を１と−１に設定することは一般性を失う。そこで，本節ではこの設定をやめて，自由に効用を設定できるようにする。それと同時に，割引因子とコストの両方が入った一般的なモデルを考え，これまでの分析の統合・整理を行う。

勝ったときの効用をW，負けたときの効用をLで表す。$W>L$を仮定する。割引因子を$0<\delta\leq 1$とし，じゃんけんのコストを$c\geq 0$とする。[9] これらの定数について

$$(1-\delta)W+\delta c>0 \tag{8}$$

という仮定をおく。書き換えると

$$-c+W>-c+\delta(W-c)$$

となる。解釈しやすいように両辺に$-c$を加えている。この不等式の意味は，どうせ勝つならタイミングは早い方が望ましいということである。右辺は次回のじゃんけんで勝つ場合の効用だからである。勝つことを延期したいという場合は例外的であり，上記の仮定はほとんどのケースをカバーすると思われる。[10]

（８）を満たすパラメータの組合せを具体的に考えてみる。$W>0$かつ$c>0$であればδの値に関わらず仮定は満たされる。$c=0$であっても，$W>0$かつ$\delta<1$であれば満たされる。$\delta=1$であっても$c>0$であれば満たされる。一方，$\delta=1$かつ$c=0$という状況は仮定を満たさない。この場合は何回あいこになっても無差別だからである。

利得表は次のようになる。

		B グー	B チョキ
A	グー	$-c+\delta V_A$, $-c+\delta V_B$	$-c+W$, $-c+L$
A	チョキ	$-c+L$, $-c+W$	$-c+\delta V_A$, $-c+\delta V_B$
A	パー	$-c+W$, $-c+L$	$-c+L$, $-c+W$

前回と同様，まずはAがチョキを出さないことを示す。もし $\delta V_A < L$ であれば，チョキを出すよりパーを出すことによってAの期待効用は確実に高くなる。一方，$\delta V_A > L$ であれば，チョキよりもグーを出すことによってAの効用は高まる。実際，$V_A \leq W-c$ なので，$\delta V_A \leq \delta(W-c) < W$ である。最後に，$\delta V_A = L$ であれば，チョキを出すよりもグーとパーを五分五分で出すことによってAの期待効用は確実に高まる。実際，五分五分で出すと期待効用は $-c+(W+L)/2$ となるが，チョキを出すと効用は $-c+L$ である。

7.1　純戦略

この節では，何かの手を確率１で出すプレーヤーがいる均衡を探す。全員が確率的に行動する均衡は次節で考える。

前回と同様，Ｂがグーを確率１で出す→Ａはパーを確率１で出す→Ｂはチョキを確率１で出す→Ａはグーを確率１で出す，という連鎖がある。したがって，Ｂがグーを確率１で出す均衡は存在しないし，Ａがパーを確率１で出すという均衡も存在しない。つまり，すべての均衡においてＡはグーを正の確率で出すし（$g_A > 0$），Ｂはチョキを正の確率で出す（$g_B < 1$）。したがって，選択が非確率的なプレーヤーがいる均衡というのは，Ａがグーしか出さないか，Ｂがチョキしか出さないか，の２種類に限られる。

まず，Ａがグーしか出さない均衡を考える。Ｂとしては，チョキを出せば一発で負けてしまい効用は $L-c$ となる。しかし，先程の議論より，Ｂは正の確率でチョキを出す。つまり，チョキを出すことはＢの期待効用を最大にする選択である。したがって，Ｂが均衡で獲得する効用はＢがチョキを出すときの効用に等しい。つまり

$$V_B = L - c \tag{9}$$

である。また，チョキがＢの期待効用を最大化するということは，利得表の最上段のＢの効用を見ると，$\delta V_B \leq L$ を意味する。したがって

$$\delta(L-c) \leq L \tag{10}$$

を得る。つまり，Ａがグーしか出さないという均衡が存在するとすれば，この不等号が成立

する場合に限定される。第６節のコストモデル（$c>0$, $\delta=1$, $L=-1$）はこの場合に含まれる。

先に進む前に，今度はＢがチョキしか出さないという均衡も考える。こういう均衡があるとすれば，当然Ａはグーしか出さない。したがって前段落の議論がそのまま成立する。したがって，この場合も(10)が成立する場合に限られる。

以上をまとめると，だれかが非確率的に行動する均衡があるとすると，それは(10)が成立する場合に限られ，均衡でＡはグーしか出さない。Ａはグーしか出さないのだから(９)も成立する。均衡の全貌を明らかにするために，以下では２つのケースに分けて議論する。

【ケース１】Ｂがチョキしか出さない場合。利得表に(９)を代入すると分かるが，(10)式が満たされれば，Ａがグーを出してＢがチョキを出す状況は均衡である。

【ケース２】Ｂがチョキもグーも正の確率で出す場合。この場合，Ｂはチョキを出してもグーを出しても同じ期待効用を得る。したがって，利得表と(９)より

$$\delta(L-c)=L \tag{11}$$

を得る。つまり，ケース２の均衡が存在するのはこの等式が成立する場合に限られる。

Ｂがグーを出す確率を g_B と書く。Ａはグーしか出さないのだから

$$V_A=g_B(-c+\delta V_A)+(1-g_B)(-c+W)$$

となる。これを V_A について解くと

$$V_A=\frac{(1-g_B)W-c}{1-\delta g_B}$$

を得る。一方，Ａはグーを出すことを選んでいるのだから，グーを出す場合の期待効用はパーを出す場合の期待効用以上である。つまり

$$g_B(-c+\delta V_A)+(1-g_B)(-c+W)\geq g_B(-c+W)+(1-g_B)(-c+L)$$

である。先ほど導出した V_A を代入して整理すると

$$W(1-2g_B+\delta g_B^2)\geq L(1-g_B-\delta g_B+\delta g_B^2)+g_B\delta c$$

を得る。最後の δc に(11)を代入すると

$$(W-L)(1-2g_B+\delta g_B^2)\geq 0$$

を得る。$W>L$ なので，結局 $1-2g_B+\delta g_B^2\geq 0$ である。これを解くと

$$g_B\leq\frac{1-\sqrt{1-\delta}}{\delta} \tag{12}$$

となる。

つまり，Ｂがグーを出す確率 g_B が(12)を満たせばそれは均衡になる。ただし，(11)が満たされている状況に限定した話である。(12)が満たされているとＡはグーを出すことが最適になり，(11)が満たされているとＢにとってグーとチョキは無差別になる。

7.2　混合戦略

本節では2人とも確率的に選択する均衡を考える。Aがグーを出す確率をg_Aで表す（$0<g_A<1$）。Bはグーを出してもチョキを出しても同じ期待利得を得るので

$$-c+g_A\delta V_B+(1-g_A)L=-c+g_A L+(1-g_A)W \tag{13}$$

となる。g_Aについて解くと

$$g_A=\frac{W-L}{\delta V_B+W-2L}$$

を得る。分母は（$W-L$）+（δV_B-L）と書ける。したがって，$0<g_A<1$の必要十分条件は

$$\delta V_B>L \tag{14}$$

である。(13)の値はV_Bなので$V_B=-c+g_A L+(1-g_A)W$である。g_Aを代入すると

$$h(V_B)\equiv\delta V_B^2+V_B[(1-\delta)W+\delta c-2L]+L^2-2cL+cW=0 \tag{15}$$

を得る。この方程式の解で(14)を満たすものを求める。$V_B=L/\delta$で評価すると

$$h'(L/\delta)=(1-\delta)W+\delta c>0$$

$$h(L/\delta)=[(1-\delta)L+\delta c](W-L)/\delta \tag{16}$$

を得る。したがって，(15)の解で(14)を満たすものが存在するとすれば，(16)は厳密に負，つまり

$$(1-\delta)L+\delta c<0 \tag{17}$$

である。つまり，本節が対象にする均衡が存在するのは(17)が成立する場合に限定される。逆に，(17)が成立すれば(15)の解で(14)を満たすものは一意に存在する（大きい方の解）。

以後，(17)を仮定する。なお，この不等号は前節に出てきた(10)の否定形である。第5節の割引モデル（$\delta<1$, $c=0$, $L=-1$）は(17)を満たす。(17)の必要条件としては$\delta<1$や$L<0$が挙げられる。

Bがグーを出す確率をg_Bで表す（$0<g_B<1$）。Aの期待効用も均等化されるので

$$-c+g_B\delta V_A+(1-g_B)W=-c+g_B W+(1-g_B)L \tag{18}$$

である。g_Bについて解くと

$$g_B=\frac{W-L}{(W-L)+(W-\delta V_A)}$$

となる。$0<g_B<1$の必要十分条件は

$$\delta V_A<W \tag{19}$$

である。(18)の値がV_Aなので$V_A=-c+g_B W+(1-g_B)L$である。g_Bを代入して整理すると

$$k(V_A)\equiv\delta V_A^2+V_A[(1-\delta)L+\delta c-2W]+W^2-2cW+cL=0 \tag{20}$$

を得る。$V_A=W/\delta$で評価すると

$$k'(W/\delta)=(1-\delta)L+\delta c<0$$

$$k(W/\delta)=-[(1-\delta)W+\delta c](W-L)/\delta<0$$

となる。したがって，(20)の解で(19)を満たすものは一意に存在する（小さい方の解)。

以上の結果をまとめると，均衡のタイプを決定するのは

$$J\equiv(1-\delta)L+\delta c$$

の符号である。この符号次第で均衡のタイプは次のようになる。

1．$J>0$ であれば，Ａがグーを出しＢがチョキを出すのが唯一の均衡である。

2．$J=0$ であれば，全均衡でＡはグーを確率 1 で出す。Ｂがグーを出す確率は $(1-\sqrt{1-\delta})/\delta$ 以下である。

3．$J<0$ であれば，均衡は一意で，Ａは正の確率でグーもパーも出し，Ｂは正の確率でグーもチョキも出す。

J が正か負かという条件を書き換えると

$$J\gtreqless 0 \Leftrightarrow L\gtreqless\delta(L-c)$$

となる。したがって，$J>0$ であるのは，負けるならタイミングは早い方が望ましいという時間選好の場合である。負けるなら早い方がいい場合は，一回目のじゃんけんで決着がつく。逆に，負けるなら後の方がいいという場合は，決着がつくまでにあいこが何回も続くというわけである。

8　普通のじゃんけんの動学分析

最後に通常のじゃんけんに戻る。普通のじゃんけんではゲームを動学化しても結論は変わらない。等確率で選ぶことが動学ゲームでも唯一の均衡である。ただ，均衡を導出する過程は同じではないので，ここで均衡の導出を行う。

モデルとしては前節で採用した最も一般的なものを考える。利得表は次のようになる。

		B グー	B チョキ	B パー
A	グー	$-c+\delta V_A,\ -c+\delta V_B$	$-c+W,\ -c+L$	$-c+L,\ -c+W$
A	チョキ	$-c+L,\ -c+W$	$-c+\delta V_A,\ -c+\delta V_B$	$-c+W,\ -c+L$
A	パー	$-c+W,\ -c+L$	$-c+L,\ -c+W$	$-c+\delta V_A,\ -c+\delta V_B$

まず，どちらのプレーヤーも等確率で手を選ぶ状況が均衡であることが簡単に分かる。相手が等確率で選ぶと，自分はどの手を選んでも同じ期待効用を得る。どの手を出しても勝ち

・負け・あいこが等確率で起こるからである。したがって，全戦略が最適であり，等確率という特定の戦略も最適である。これはどちらのプレーヤーについても言えるので，どちらのプレーヤーも等確率で選ぶ状況は一つの均衡である。

均衡は一つとは限らないので，他にも均衡があるか考える。まず，ある特定の手を出さないプレーヤーがいる状況は均衡にならないことを示す。例えば，Aはグーを出さないという状況は均衡にならない。これを背理法で証明するために，Aはグーを出さないという均衡が存在するとする。すると，その均衡においてBはパーを出さない。これを示すには，以前と同様，δV_B の値で場合分けをする。$\delta V_B > L$ であれば，Bとしてはパーを出すよりチョキを出す方が効用は確実に高くなる（$\delta V_B \leq \delta(W-c) < W$）。一方，$\delta V_B < L$ であれば，パーを出すよりグーを出す方がBの効用は確実に高くなる。最後に，$\delta V_B = L$ であれば，パーを出すよりグーとチョキを五分五分で出す方がBの期待効用は確実に高くなる。したがって，いずれの場合もBはパーを出さない。すると，対称的な議論より，Aはチョキを出さない。同じ議論を繰り返すと，Bはグーを出さないし，Aはパーを出さないし，Bはチョキを出さない。したがって誰も何も出さないという矛盾した結論になる。この議論は「Aがグーを出さない」ことから出発したが，どこから出発しても同じ矛盾に達する。したがって，全ての均衡において，どのプレーヤーも全ての手を正の確率で出す。

任意の均衡を考え，Bがグー・チョキ・パーを出す確率をそれぞれ（g_B, t_B, p_B）と表す。Aがどの手を出してもAの期待利得は同じで，それは V_A に等しい。したがって

$$-c + g_B \delta V_A + t_B W + p_B L = V_A \tag{21}$$

$$-c + g_B L + t_B \delta V_A + p_B W = V_A \tag{22}$$

$$-c + g_B W + t_B L + p_B \delta V_A = V_A \tag{23}$$

を得る。すべて足し合わせると $-3c + \delta V_A + L + W = 3V_A$ となる。V_A について解くと

$$V_A = \frac{W + L - 3c}{3 - \delta}$$

を得る。この値は，Bが等確率で選ぶ場合のAの期待効用に等しい。

$p_B = 1 - g_B - t_B$ を使って(21)と(22)を書き直すと

$$\begin{bmatrix} \delta V_A - L & W - L \\ L - W & \delta V_A - W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_B \\ t_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_A + c - L \\ V_A + c - W \end{bmatrix} \tag{24}$$

となる。最初の行列の行列式を計算すると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \delta V_A - L & W - L \\ L - W & \delta V_A - W \end{vmatrix} &= \{(\delta V_A - W) + (W - L)\}(\delta V_A - W) + (W - L)^2 \\ &= \{(\delta V_A - W) + (W - L)\}^2 - (W - L)(\delta V_A - W) \end{aligned}$$

$$= (\delta V_A - L)^2 + (W - L)(W - \delta V_A) > 0$$

となる。よって連立方程式(24)の解（g_B，t_B）は一意に存在する。したがってＢの均衡戦略（g_B，t_B，p_B）は一意である。対称的な議論より，Ａの均衡戦略（g_A，t_A，p_A）も一意である。

9　お　わ　り　に

本稿ではじゃんけんの動学分析を行ったが，結果は定性的にも定量的にも静学分析と大きく異なるものであった。静学分析では問題にならない時間選好率や手間費用といったパラメータも結果に大きく影響することが分かった。通常のじゃんけんのように結果が同じ場合もあるが，じゃんけんに似たゲームを分析する場合，疑わしければ動学分析も行っておく方が望ましいと言える。

注

＊　この論文のきっかけを作ってくれた関口格氏，宮澤信二郎氏，学部ゼミ生一同に感謝します。変則じゃんけんの議論相手になってくれている鮫島裕輔氏と，有益なコメントをくれた高羅ひとみ氏と小嶋寿史氏にも感謝します。本研究は科研費（20530156）の助成を受けたものです。

1）変則じゃんけんも含めてじゃんけんを取り上げている教科書としては梶井（2002）や渡辺（2008），Dixit and Nalebuff（2008）等がある。

2）参加者が３人以上の場合は，あいこのときだけでなく，勝者が複数のときも再度じゃんけんがなされる。Maehara and Ueda（2000）と平野・安芸（2003）は，決着までの回数を参加者数と関連づけて統計的に調べている。しかし彼らの対象は普通のじゃんけんのみである。本稿では変則じゃんけんを主に考え，参加者数は２人の場合に限っている。

3）例えば Walker and Wooders（2001）や Chiappori et al.（2002）など。

4）じゃんけんの利得表としてこの表は広く採用されている。ゲーム理論の出発点である von Neumann and Morgenstern（1944）でも同一の利得表が採用されている。

5）以下で解説する分析手法は他の変則じゃんけんでも有効である。特にプレーヤー間に非対称性があるじゃんけんで有益である。

6）一回目のじゃんけんの前に「最初はグー」と言って全員がグーを出すことが一般的に行われるが，その場合は V_i は最初のグーを出した後で評価した期待効用である。

7）コストが入っているので，本節の動学ゲームはゼロサムでもコンスタントサムでもない。あいこが続くと効用の和も減少する。

8）じゃんけんのスピードを考えると，0.9999という割引因子は低目の値である。割引因子が年率で0.9だとすると，一秒当たりの割引因子はおおよそ 0.999999997 である。この割引因子ではあいこの平均回数は12910回となる。

9）$\delta > 0$ と仮定するのは議論をスムーズにするためである。

10）褒美を受け取るまでに故意に少し時間をおいて，褒美を貰えるという期待感を楽しみたいと思うことはあるし，行動経済学でもよく議論になる。しかし，この場合でも最適な延期期間がある

わけで，先に延ばせば延ばすほど嬉しいわけではない。したがって，この状況をカバーするにはもう少し複雑な時間選好が必要である。

参 考 文 献

Chiappori, P. A., Levitt, S., and Groseclose, T.（2002）“Testing Mixed-Strategy Equilibria When Players Are Heterogeneous: The Case of Penalty Kicks in Soccer,” *American Economic Review,* Vol. 92, pp. 1138-1151.

Dixit, A. K. and Nalebuff, B. J.（2008）*The Art of Strategy: A Game Theorist's Guide to Success in Business & Life,* New York: W. W. Norton & Company.

Maehara, H. and Ueda, S.（2000）“On the Waiting Time in a Janken Game,” *Journal of Applied Probability,* Vol. 37, pp. 601-605.

von Neumann, J. and Morgenstern, O.（1944）*Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton: Princeton University Press（銀林浩・橋本和美・宮本敏雄監訳，阿部修一・橋本和美訳『ゲームの理論と経済行動』全 3 冊，筑摩書房，2009）.

Walker, M. and Wooders, J.（2001）“Minimax Play at Wimbledon,” *American Economic Review,* Vol. 91, pp. 1521-1538.

梶井厚志（2002）『戦略的思考の技術：ゲーム理論を実践する』中央公論新社.

平野勝臣・安芸重雄（2003）「ジャンケンの厳密な待ち時間分布と性質」『統計数理』第51号，167-172頁.

渡辺隆裕（2008）『ゼミナール　ゲーム理論入門』日本経済新聞出版社.