

数学基礎論サマースクール 2015

強制法と様相論理 3

薄葉 季路

神戸大学

2015 年 8 月 21 日

- 目的: 強制法を用いて定義される「強制様相論理」を中心に, 強制法と様相論理に関するいくつかのトピックの解説.
- 一回目: 概観, 集合論の基礎
- 二回目: 強制拡大, 強制関係
- 三回目: 強制様相論理, 関連話題

Definition 1

φ : $\mathcal{L}_{ZF}$ の閉論理式

- $\Box\varphi := \forall \mathbb{P} (\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi)$.
- $\Diamond\varphi := \exists \mathbb{P} (\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi)$.

Remark 2

Forcing relation “ $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ ” は $\mathbb{P}$ をパラメータとする $\mathcal{L}_{ZF}$ の論理式 $\Phi_{\varphi}(\mathbb{P})$ として定義されるので $\Box\varphi, \Diamond\varphi$ は $\mathcal{L}_{ZF}$ の閉論理式になる.

よって, $\Box\Box\varphi, \Diamond\Box\varphi, \Diamond\Diamond\varphi$ なども自然に定義できる.

Lemma 1

$\varphi: \mathcal{L}_{ZF}$ の閉論理式

1. $\Diamond\varphi \iff \neg\Box\neg\varphi.$

2. $\Box\varphi \iff \neg\Diamond\neg\varphi.$

(1). $(\Rightarrow)$ 明らか.

$$(\Leftarrow) \neg\Box\neg\varphi \iff \neg\forall P (\Vdash_P \neg\varphi) \iff \exists P (\nVdash_P \neg\varphi).$$

$\nVdash_P \neg\varphi$ ならばある $p \in P$ で $p \Vdash_P \neg(\neg\varphi)$.

- 基本性質 $p \nVdash_P \varphi(\vec{\sigma})$ ならば, $q \leq p$ で $q \Vdash_P \neg\varphi(\vec{\sigma})$ となるものがある.

$$\therefore p \Vdash_P \varphi.$$

$$Q = P \restriction p \text{ とすると, } p \Vdash_P \varphi \iff \Vdash_Q \varphi.$$

$$\text{よって } \exists Q (\Vdash_Q \varphi) \Rightarrow \Diamond\varphi.$$

Definition 3

様相論理の論理式に $\mathcal{L}_{ZF}$ の閉論理式を割り当てる operator H が次を満たす時, H を Hamkins translation と呼ぶ:

1. $H(\perp) = \perp$.
2. $H(\varphi \wedge \psi) = H(\varphi) \wedge H(\psi)$.
3. $H(\neg\varphi) = \neg H(\varphi)$.
4. $H(\Box\varphi) = \forall\mathbb{P} (\Vdash_{\mathbb{P}} H(\varphi))$

Definition 4

Modal Logic of Forcing, MLF, とは, 任意の Hamkins translation H に対して

$$\text{ZFC} \vdash H(\varphi)$$

となる様相論理式 φ 全体である.

Theorem 5 (Hamkins)

MLF は S4.2 を含む正規様相論理.

正規様相論理

MLF がトートロジーをすべて含み, モーダスポネンスで閉じていることは明らか.

Lemma 2 (K)

$$\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi).$$

$\Box(\varphi \rightarrow \psi)$, $\Box\varphi$ を仮定する.

勝手に取った $\mathbb{P}$ に対して, $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi \rightarrow \psi$, $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ なので $\Vdash_{\mathbb{P}} \psi$.

よって $\forall \mathbb{P} (\Vdash_{\mathbb{P}} \psi)$, すなわち $\Box\psi$.

Lemma 3 (必然化則)

$$\text{ZFC} \vdash \varphi \text{ ならば } \text{ZFC} \vdash \Box\varphi.$$

forcing relation は ZFC の公理をすべて force し, 述語論理の推論に関して閉じているので $\text{ZFC} \vdash \varphi$ ならばすべての $\mathbb{P}$ について $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ である.

MLF が S4.2 を含むには, 次が ZFC から証明できれば良い:
任意の $\mathcal{L}_{ZF}$ の閉論理式 φ について

T $\Box\varphi \rightarrow \varphi.$

4 $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi.$

.2 $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi.$

T

Lemma 4

$\Box\varphi \rightarrow \varphi.$

$\mathbb{P} = \{\emptyset\}$ とする.

$\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ であり, $F = \mathbb{P}$ が generic filter になるので $\mathbf{V}[F] = \mathbf{V} \models \varphi.$

4 and Forcing product

(4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$.

対偶の $\Diamond\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ を考える.

これは $\exists P (\Vdash_P “\exists Q (\Vdash_Q \varphi)”)$ ならば $\exists P (\Vdash_P \varphi)$ を意味する. つまり:
二回の forcing で force できる命題は一回の forcing で force できる.

Definition 6

$\mathbb{P}$: forcing notion,

$\dot{Q}$: $\mathbb{P}$ -name s.t. $\Vdash_{\mathbb{P}} “\dot{Q} \text{ は forcing notion}”$

このとき, forcing product $\mathbb{P} * \dot{Q}$ を次のようなものとする:

1. $\mathbb{P} * \dot{Q} = \{ \langle p, \dot{q} \rangle : p \in \mathbb{P}, \dot{q} \text{ は } \mathbb{P}\text{-name で } \Vdash_{\mathbb{P}} “\dot{q} \in \dot{Q}” \}$.
2. $\langle p_0, \dot{q}_0 \rangle, \langle p_1, \dot{q}_1 \rangle \in \mathbb{P} * \dot{Q}$ に対して $\langle p_0, \dot{q}_0 \rangle \leq \langle p_1, \dot{q}_1 \rangle \iff$
 $p_0 \leq p_1 \text{ in } \mathbb{P} \text{ かつ } p_1 \Vdash_{\mathbb{P}} “\dot{q}_0 \leq \dot{q}_1 \text{ in } \dot{Q}”$.
3. $1_{\mathbb{P} * \dot{Q}} = \langle 1_{\mathbb{P}}, \dot{1}_{\dot{Q}} \rangle$, ここで $\dot{1}_{\dot{Q}}$ は “ $\dot{1}_{\dot{Q}}$ は $\dot{Q}$ の最大元” が force されている $\mathbb{P}$ -name.

Lemma 5

先の $\leq$ は $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ 上の *preorder* であり, $1_{\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}}$ は最大元になる.

Remark 7

$\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} = \{ \langle p, \dot{q} \rangle : p \in \mathbb{P}, \Vdash_{\mathbb{P}} " \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}} " \}$ は一般に集合にならない;
 $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}$ となる $\mathbb{P}$ -name 全体は proper class になる.

一方,

$$\dot{q}_0 \equiv \dot{q}_1 \iff \Vdash_{\mathbb{P}} " \dot{q}_0 = \dot{q}_1 "$$

で同値関係を入れると, 同値類全体は集合とみなせる. この同値関係で割った preorder を $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ とみなすことで, これが集合になっている, とおもってもよい.

よって, $\langle \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}, \leq, \langle 1_{\mathbb{P}}, \dot{1}_{\dot{\mathbb{Q}}} \rangle \rangle$ は forcing notion となる.

Lemma 6 (Iteration lemma)

$\mathbb{P}$: forcing notion, $\dot{Q}$: $\mathbb{P}$ -name で $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “ $\dot{Q}$ は forcing notion”

φ : $\mathcal{L}_{ZF}$ の閉論理式

このとき次は同値:

1. $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “ $\Vdash_{\dot{Q}} \varphi$ ”.
2. $\Vdash_{\mathbb{P} * \dot{Q}} \varphi$.

S4 の証明:

◇◇ φ とする. したがって, ある $\mathbb{P}$ で $\Vdash_{\mathbb{P}} \exists \dot{Q} (\Vdash_{\dot{Q}} \varphi)$ となる.

Forcing relation の性質:

- $p \Vdash_{\mathbb{P}} \exists v (\varphi(v))$ ならば, ある $\mathbb{P}$ -name σ で $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\sigma)$ となるものがある.

より, $\mathbb{P}$ -name $\dot{Q}$ で

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}\dot{Q} \text{ は forcing notion で } \Vdash_{\dot{Q}} \varphi\text{”}$$

となるものがある. このとき iteration lemma より

$$\Vdash_{\mathbb{P} * \dot{Q}} \varphi$$

となる.

Lemma 7

M, N_0, N_1 : ctm

もし N_0 が M の generic extension, N_1 が N_0 の generic extension ならば N_1 は M の generic extension.

スケッチ:

forcing notion $\mathbb{P} \in M$, M -generic filter F で $N_0 = M[F]$ となるものがある.

forcing notion $\mathbb{Q} \in N_1$, N_1 -generic filter G で $N_1 = N_0[G] = M[F][G]$ となるものがある.

$\mathbb{Q}$ の $\mathbb{P}$ -name $\dot{\mathbb{Q}} \in M$ が取れる.

M の中で forcing product $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ をとり, N_1 で F と G の積を考える:

$$F * G = \{\langle p, \dot{q} \rangle \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} : p \in F, \dot{q}[F] \in G\}$$

は実は $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ の M -generic filter で $M[F][G] = M[F * G]$ になる.

よって $N_1 = M[F * G]$, つまり N_1 は M の $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ による generic extension になる.

.2 and Product forcing

Remark 8

$\mathbb{P}, \mathbb{Q}$: forcing notion. このとき $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “ $\mathbb{Q}$ は forcing notion”

よって, $\mathbb{P}$ の forcing の後, 再び $\mathbb{Q}$ による forcing を考えることが出来る.

Lemma 8 (Product lemma)

$\mathbb{P}, \mathbb{Q}$: forcing notion. $\varphi: \mathcal{L}_{ZF}$ の閉論理式

このとき, 次は同値:

1. $\Vdash_{\mathbb{P}} \Vdash_{\mathbb{Q}} \varphi$.
2. $\Vdash_{\mathbb{Q}} \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$.
3. $\Vdash_{\mathbb{P} \times \mathbb{Q}} \varphi$.

ここで, $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ は次のような forcing notion: $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ 上の順序関係 $\leq$ を

$\langle p_0, q_0 \rangle \leq \langle p_1, q_1 \rangle \iff p_0 \leq p_1 \text{ in } \mathbb{P} \text{ かつ } q_0 \leq q_1 \text{ in } \mathbb{Q}.$

$\langle 1_{\mathbb{P}}, 1_{\mathbb{Q}} \rangle$ は $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ の最大元

(.2) $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ の証明:

$\Diamond\Box\varphi$ を仮定. よって, ある $\mathbb{P}$ で $\Vdash_{\mathbb{P}} \forall Q (\Vdash_Q \varphi)$.

$\Box\Diamond\varphi$ を知りたいので, 勝手に Q を取る. $\Vdash_Q \exists \mathbb{P} (\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi)$ を示したい.

このとき, $\Vdash_{\mathbb{P}} \Vdash_Q \varphi$.

Product lemma より $\Vdash_Q \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$. よって $\Vdash_Q \exists \mathbb{P} (\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi)$.

$S4.2 \subseteq MLF$.

Theorem 9 (Hamkins-Löwe)

MLF = S4.2.

アイデア:

S4.2 の有限フレーム性を使う:

$\varphi \notin \text{S4.2}$ ならば, 有限 prelattice になっている $F = \langle W, R \rangle$, $w \in W$, 付値 v で $(F, v), w \models \neg\varphi$ となるものが取れる.

この (W, R) と v を見て, うまく Hamkins translation H を取って, $\text{ZFC} \not\models H(\varphi)$ となるようにしたい.

ZFC から independent な “うまい” 命題をたくさん持ってきて, がんばってつくる.

Definition 10

- $\mathcal{L}_{ZF}$ の命題 b が **button** $\iff \Diamond \Box b$ が真.
- button b が **pushed** $\iff \Box b$ が真. そうでないとき, **unpushed**.
- $\mathcal{L}_{ZF}$ の命題 s が **switch** $\iff \Box \Diamond s$ かつ $\Box \Diamond \neg s$
- switch s が **on** $\iff s$ が真, そうでないとき **off**.

Remark 11

1. ZFC-provable な switch は無限個存在する.
2. ZFC-provable な unpushed button は存在しないが, unpushed なことが consistent な button は存在する.

Definition 12

button b_n と switch s_m の集まりが **independent**

$\iff$

1. すべての b_n は unpushed.
2. 任意の $\mathbb{P}, \mathbb{N}$ の有限部分集合 B と S_0, S_1 に対して, $\mathbb{P}$ が次を force する:
 - 2.1 ある $\mathbb{Q}$ があって, $\mathbb{Q}$ による forcing は $n \in B$ ならば b_n を push するが, $n \notin B$ なる b_n の pushed, unpushed は保存し, 各 s_m の on, off も保存する.
 - 2.2 ある $\mathbb{R}$ があって, $m \in S_0$ なら $\mathbb{R}$ は s_m を off に, $m \in S_1$ なら s_m を on にするが, それ以外の s_m および b_n の on, off, pushed, unpushed は保存する.

Lemma 9

閉論理式の集まり b_n, s_m たちで

$\text{ZFC} + \text{"}b_n, s_m \text{ たちは independent"}$

が *consistent* になるものが存在する.

Lemma 10

十分たくさんの *switch* と *button* の *independent* な集まりが存在する。このとき、任意の有限 *pre-lattice* になっている $F = \langle W, R \rangle$, $w \in W$, 付値 v に対して, *Hamkins translation* H が存在して, 任意の様相論理の論理式 φ に対して

$$(F, v), w \models \varphi \iff H(\varphi)$$

S4.2 = MLF

$\varphi \notin \text{S4.2}$ ならば, 有限 *prelattice* になっている $F = \langle W, R \rangle$, $w \in W$, 付値 v で $(F, v), w \models \neg\varphi$ となるものが取れる。

ここで十分たくさんの *button* と *switch* の存在は ZFC と *consistent* なので, ある Hamkins translation H で $H(\neg\varphi)$ が ZFC と *consistent* になるものが取れる。したがって $\text{ZFC} \not\models H(\varphi)$ となり, $\varphi \notin \text{MLF}$ となる。

Question 13

MLF = S4.2 はどういう意味か？

- 4, .2 とともに iteration lemma, product lemma にちょうど対応している.
- これが forcing の本質？

関連話題 1

Definition 14

$T \supseteq \text{ZFC}$ として,
 $\text{MLF}^T = \{\varphi : \text{任意の Hamkins translation } H \text{ に対して } T \vdash H(\varphi)\}.$

Remark 15

1. $\text{S4.2} \subseteq \text{MLF}^T.$
2. MLF^T が常に正規様相論理になるかどうかはわかっていない.
(必然化則が問題)

Theorem 16 (Hamkins, Stavi-Väänänen)

$T := \text{ZFC} + \{\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi : \varphi \text{ は集合論の論理式} \}$ は無矛盾である.
このとき, $\text{MLF}^T = \text{S5}$ となる.

スケッチ:

$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ の dual $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$ を考える.

T が無矛盾であることを示すには, 有限個の $\mathcal{L}_{\text{ZF}}$ の閉論理式 $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ に対して $\text{ZFC} + \{\Diamond\Box\varphi_i \rightarrow \Box\varphi_i : i \leq n\}$ が無矛盾になることを示せばよい. そのためには, forcing notion $\mathbb{P}$ で

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \Diamond\Box\varphi_i \rightarrow \Box\varphi_i \ (i \leq n)$$

となるものを作ればよい.

$\Diamond \Box \varphi_0 \rightarrow \Box \varphi_0$ を考える.

もし, $\Diamond \Box \varphi_0$ が成り立っているならば $\mathbb{P}_0$ で $\Vdash_{\mathbb{P}_0} \Box \varphi_0$ となるものがある.
そうでないなら, $\mathbb{P}_0$ は trivial forcing とする.

このとき, $\Vdash_{\mathbb{P}_0} \Diamond \Box \varphi_0 \rightarrow \Box \varphi_0$ になる;

- そうでないなら, $p \in \mathbb{P}_0$ で $p \Vdash_{\mathbb{P}_0} \Diamond \Box \varphi_0 \wedge \neg \Box \varphi_0$ となるものがある.
- $p \Vdash_{\mathbb{P}_0} \Diamond \Box \varphi_0 \Rightarrow p \Vdash_{\mathbb{P}_0} \exists \mathbb{Q} (\Vdash_{\mathbb{Q}} \Box \varphi_0)$.
- よって, $\dot{\mathbb{Q}}$ で $p \Vdash_{\mathbb{P}_0} \text{"}\Vdash_{\dot{\mathbb{Q}}} \Box \varphi_0\text{"}$ となるものがある.
- forcing product $\mathbb{R} = (\mathbb{P}_0 \restriction p) * \dot{\mathbb{Q}}$ を考えると $\Vdash_{\mathbb{R}} \Box \varphi_0$.
- すなわち $\Diamond \Box \varphi_0$ が成り立つ.
- $\mathbb{P}_0$ の取り方より, $\Vdash_{\mathbb{P}_0} \Box \varphi_0$.
- これは $p \Vdash_{\mathbb{P}_0} \neg \Box \varphi_0$ に反する.

同様の議論で, $\Vdash_{\mathbb{P}_0} \Box(\Diamond\Box\varphi_0 \rightarrow \Box\varphi_0)$ がわかる.

$\Diamond\Box\varphi_1 \rightarrow \Box\varphi_1$ については,

- $\Vdash_{\mathbb{P}_0} \Diamond\Box\varphi_1$ ならば, $\dot{\mathbb{P}}_1$ で $\Vdash_{\mathbb{P}_0} \Vdash_{\dot{\mathbb{P}}_1} \Box\varphi_1$ となるものを取る.
- そうでないならば $\dot{\mathbb{P}}_1$ を trivial forcing の $\mathbb{P}_0$ -name とする.
- φ_0 のときと同じような議論で, $\Vdash_{\mathbb{P}_0 * \dot{\mathbb{P}}_1} \Diamond\Box\varphi_1 \rightarrow \Box\varphi_1$.

以下これを繰り返して, $\mathbb{P}_0, \dot{\mathbb{P}}_1, \dots, \dot{\mathbb{P}}_n$ が取れて, それらの forcing product $\mathbb{P}_0 * \dot{\mathbb{P}}_1 * \dots * \dot{\mathbb{P}}_n$ に対して各 $i \leq n$ について

$$\Vdash_{\mathbb{P}_0 * \dot{\mathbb{P}}_1 * \dots * \dot{\mathbb{P}}_n} \Diamond\Box\varphi_i \rightarrow \Box\varphi_i$$

となる. したがって $\text{ZFC} + \{\Diamond\Box\varphi_i \rightarrow \Box\varphi_i : i \leq n\}$ が consistent になる.

Theorem 17 (Hamkins-Löwe)

$T \supseteq \text{ZFC}$ に対して, $\text{MLF}^T \not\subseteq \text{S5}$ ならば T は矛盾している.

したがって, consistent な MLF^T は S4.2 と S5 には含まれる.

Question 18

$T \supseteq \text{ZFC}$ で

1. $\text{S4.2} \subsetneq \text{MLF}^T \subsetneq \text{S5}$ となるものはあるか?
2. MFL^T が正規でないものはあるか?

関連話題 2

Forcing notion の class で Γ で次を満たすもののみ考える:

- $\mathbb{P} \in \Gamma, p \in \mathbb{P} \Rightarrow \mathbb{P} \restriction p \in \Gamma.$

Definition 19

Γ : forcing notion の class, $\varphi: \mathcal{L}_{ZF}$ の閉論理式

このとき,

- $\Box_{\Gamma} \varphi \iff \forall \mathbb{P} \in \Gamma (\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi)$
- $\Diamond_{\Gamma} \varphi \iff \exists \mathbb{P} \in \Gamma (\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi)$

Definition 20

H が Γ -translation

$\iff$

1. $\dots,$
2. $H_{\Gamma}(\Box\varphi) = \forall \mathbb{P} \in \Gamma (\Vdash_{\mathbb{P}} H_{\Gamma}(\varphi)).$

$\text{MLF}_{\Gamma} = \{\varphi : \text{任意の } \Gamma\text{-translation } H_{\Gamma} \text{ に対して } \text{ZFC} \vdash H_{\Gamma}(\varphi)\}.$

Lemma 11

MLF_{Γ} は正規様相論理.

Γ が *trivial forcing* を含めば $\mathsf{T} \subseteq \text{MLF}_{\Gamma}.$

Definition 21

forcing notion $\mathbb{P}$ が **countable chain condition** (c.c.c.) を持つ

$\iff$ 任意の $A \subseteq \mathbb{P}$ で A の各二元が incompatible ならば, A は可算である.

Lemma 12

1. $\mathbb{P}$ が c.c.c., $\mathbb{P}$ -name $\dot{\mathbb{Q}}$ が $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “ $\dot{\mathbb{Q}}$ は c.c.c. forcing notion” ならば, forcing product $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ は c.c.c. forcing notion.
2. c.c.c. forcing notion $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ で $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ が c.c.c. を満たさないものがあることは ZFC と無矛盾.

Theorem 22 (Inamdar)

$S4 \subseteq \text{MLF}_{\text{c.c.c.}} \subsetneq S4.2$.