

# 数学基礎論サマースクール 2015

## 強制法と様相論理 2

薄葉 季路

神戸大学

2015 年 8 月 20 日

- 目的: 強制法を用いて定義される「強制様相論理」を中心に, 強制法と様相論理に関するいくつかのトピックの解説.
- 一回目: 概観, 集合論の基礎
- 二回目: 強制拡大, 強制関係
- 三回目: 強制様相論理, 関連話題

# 集合モデルの基礎

## Definition 1

集合  $X$  が **transitive** とは,  $x \in X, y \in x$  なら  $y \in X$  となること  
 $\iff \forall x \in X (x \subseteq X).$

## Definition 2

$M$ : transitive set,  $\varphi(\vec{v})$ :  $\mathcal{L}_{ZF}$  の論理式

$\vec{x} \in M$ :  $M$  の元の列

$M \models \varphi(\vec{x})$  を  $\varphi$  の構成に関する帰納法で次のように定義:

1.  $\varphi := v_0 \in v_1$  のとき,  $M \models x_0 \in x_1 \iff x_0 \in x_1$ .
2.  $\varphi := v_0 = v_1$  のとき,  $M \models x_0 = x_1 \iff x_0 = x_1$ .
3.  $\varphi := \neg\psi$  のとき,  $M \models \neg\psi \iff M \not\models \psi$ .
4.  $\varphi := \psi_0 \wedge \psi_1$  のとき,  $M \models \psi_0 \wedge \psi_1 \iff M \models \psi_0$  かつ  $M \models \psi_1$ .
5.  $\varphi := \psi_0 \vee \psi_1$  のとき,  $M \models \psi_0 \vee \psi_1 \iff M \models \psi_0$  または  $M \models \psi_1$ .
6.  $\varphi := \exists v\psi(v)$  のとき,  $M \models \exists v\psi(v) \iff$  ある  $x \in M$  で  $M \models \psi(x)$  となるものがある.
7.  $\varphi := \forall v\psi(v)$  のとき,  $M \models \forall v\psi(v) \iff$  任意の  $x \in M$  に対して  $M \models \psi(x)$  となる.

### Definition 3

$M$  が transitive かつ任意の ZFC の公理  $\varphi$  に対して  $M \models \varphi$  になるとき、 $M$  を (ZFC の) transitive model という。

### Remark 4

1. ゲーデルの第二不完全性定理により, ZFC から ZFC の集合モデルの存在は示せない;  
ZFC  $\vdash$  “ZFC は無矛盾  $\leftrightarrow$  ZFC の集合モデルが存在する”
2. より強く, ZFC + “ZFC は無矛盾” から ZFC の transitive model の存在は導けない.
3. というわけで, 以後の “ $M$  が ZFC の transitive model ならば  $\bigcirc\bigcirc$ ” という形の命題は “ZFC の transitive model が存在するならば” という暗黙の前提がある.

## Remark 5

- 一方, これから述べる命題

$M$  が ZFC の transitive model ならば  $\text{〇〇}$

は, 証明を見れば, 実際は次のような命題に変形できることがわかる:

( $\text{〇〇}$ に応じた) ZFC の公理  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  が存在して,

$\text{ZFC} \vdash \text{“}M \text{ が transitive かつ } M \models \varphi_0, \dots, \varphi_n \text{ ならば } \text{〇〇}\text{”}$

実際に  $M$  がフルな ZFC の model である必要はあまりない.

- さらに, 有限個の ZFC の論理式  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  に対して, ZFC から “ $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  の可算 transitive model が存在する” が証明できる.
- これらをあわせれば, これから先の命題は ZFC で有意義な命題とみなせる.

## Definition 6

$\varphi(v)$ : 集合論の論理式,  $M$ : ZFC の transitive model

$\varphi$  が  $M$  に対して絶対的

$\iff$  任意の  $x \in M$  に対して,

$$\varphi(x) \iff M \models \varphi(x)$$

次の論理式は任意の transitive model に対して絶対的:

1.  $u \in v, u = v$
2.  $u \subseteq v$
3.  $u$  は  $v$  上の二項関係
4.  $u$  は  $v$  から  $w$  への写像
5.  $u$  は自然数全体
6.  $u$  は有限集合

一般に絶対的にならないのは;

7.  $u$  は可算集合 ( $\exists f : \mathbb{N} \rightarrow u$ , bijection);

仮に  $x \in M$  が可算集合でも, bijection  $f : \mathbb{N} \rightarrow x$  が  $M$  に入っていないかもしれず, その時には

$$M \models \neg \exists f : \mathbb{N} \rightarrow x \text{ bijection}$$

となる (スコーレムのパラドックス).



# Forcing notion

## Definition 7

$\mathbb{P}$ : 集合

$\mathbb{P}$  上の二項関係  $\leq_{\mathbb{P}}$  が

- $x \leq_{\mathbb{P}} x$  (反射的)
- $x \leq_{\mathbb{P}} y \wedge y \leq_{\mathbb{P}} z \Rightarrow x \leq_{\mathbb{P}} z$  (推移的)

となるとき,  $\leq_{\mathbb{P}}$  を  $\mathbb{P}$  の **preorder** と呼ぶ. 組  $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}} \rangle$  を **preordered set** と呼ぶ.

## Definition 8

$\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}} \rangle$  が preordered set で,  $1_{\mathbb{P}} \in \mathbb{P}$  が

- $x \leq_{\mathbb{P}} 1_{\mathbb{P}}$

を満たすとき,  $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, 1_{\mathbb{P}} \rangle$  を **forcing notion** と呼ぶ.

以下,  $\langle \mathbb{P}, \leq_{\mathbb{P}}, 1_{\mathbb{P}} \rangle$  を単に  $\mathbb{P}$  と書く.

## Remark 9

1.  $M$  が ZFC の transitive model のとき, “ $\mathbb{P}$  が forcing notion である” は絶対的.
2.  $\langle \mathbb{P}, \leq, 1_{\mathbb{P}} \rangle \in M$  が forcing notion で  $M$  が transitive model ならば  $\mathbb{P}, \leq, 1_{\mathbb{P}} \in M$  かつ  $\mathbb{P} \subseteq M$ .

## Definition 10

$p, q \in \mathbb{P}$  が **incompatible** とは  $r \leq p, q$  となる  $r \in \mathbb{P}$  が存在しないこと.  
このとき  $p \perp q$  と書く.

## Remark 11

$M$  が ZFC の transitive model,  $\mathbb{P} \in M$  が forcing notion,  $p, q \in M$  ならば  $p \perp q$  は  $M$  に対して絶対的.

## Definition 12

$\mathbb{P}$ : forcing notion

$F \subseteq \mathbb{P}$  が filter とは,

1.  $1_{\mathbb{P}} \in F$ .
2.  $p, q \in F \rightarrow \exists r \in F (r \leq p, q)$ .
3.  $p \in F, p \leq q \rightarrow q \in F$ .

$F = \{1_{\mathbb{P}}\}$  は自明な filter になる.

## Definition 13

$\mathbb{P}$ : forcing notion.

集合  $x$  が  $\mathbb{P}$ -name

$\iff$  任意の  $y \in x$  に対して,  $\mathbb{P}$ -name  $z$  と  $p \in \mathbb{P}$  で  $y = \langle z, p \rangle$  となること.

## Definition 14

$\mathbb{P}$ : forcing notion,  $F \subseteq \mathbb{P}$ : filter,

各  $\mathbb{P}$ -name  $\sigma$  に対して,  $\sigma$  の  $F$  による解釈,  $\sigma[F]$  を,

$$\sigma[F] = \{\tau[F] : \exists p \in F (\langle \tau, p \rangle \in \sigma)\}$$

とする.

## Remark 15

例によってこの定義は循環しているので, 適当な整礎関係の下での再帰的定義を用いる必要がある.

## Definition 16

$M$ : transitive model,  $\mathbb{P} \in M$ : forcing notion,

$$M[F] = \{\sigma[F] : \sigma \in M \text{ は } \mathbb{P}\text{-name}\}$$

## Lemma 1

$M \subseteq M[F]$ .

Sketch:

各集合  $x$  に対して,  $x$  の canonical  $\mathbb{P}$ -name  $\check{x}$  を

$$\check{x} = \{\langle \check{y}, 1_{\mathbb{P}} \rangle : y \in x\}$$

と定義する. このとき

1.  $x \in M \Rightarrow \check{x} \in M$ .

2.  $\check{x}[F] = x$

となるので  $M \subseteq M[F]$ .

# Generic filter

## Definition 17

$D \subseteq \mathbb{P}$  が **dense** とは, 任意の  $p \in \mathbb{P}$  に対して,  $q \in D$  で  $q \leq p$  となること.

## Remark 18

$M$ : transitive model,  $\mathbb{P} \in M$  が forcing notion の時,  $D \in M$  が dense であることは絶対的.

## Definition 19

$M$ : transitive model,  $\mathbb{P} \in M$ : forcing notion.

filter  $F \subseteq M$  が  **$M$ -generic**

$\iff$  任意の  $\mathbb{P}$  の dense set  $D \in M$  に対して,  $D \cap F \neq \emptyset$ .

$M$ -generic filter が存在するとは限らず, 存在したとしても  $F \in M$  とは限らない.

## Lemma 2

$M$ : transitive model,  $\mathbb{P} \in M$ : forcing notion,  
もし任意の  $p \in \mathbb{P}$  に対して  $q, r \leq p$  で  $q \perp r$  となるものが存在するならば,  $M$ -generic filter は  $M$  に属さない.

Sketch:

$F \in M$  ならば,  $D = \mathbb{P} \setminus F \in M$  となる. このとき仮定より  $D$  は  $\mathbb{P}$  の dense subset になるが,  $M$ -generic なので  $D \cap F \neq \emptyset$  とならなければならないはず矛盾.



## Definition 20

$M$  が可算な transitive model のとき **ctm**(countable transitive model) と呼ぶ.

## Lemma 3

$M$  が ctm ならば, 任意の forcing notion  $\mathbb{P} \in M$  と  $p \in \mathbb{P}$  に対して,  $\mathbb{P}$  の  $M$ -generic filter で  $p \in F$  となるものが  $s$  存在する.

Sketch:

$M$  が可算なので,  $M$  に属する  $\mathbb{P}$  の dense set は高々可算個. それらを  $\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$  とする. あとは  $\mathbb{P}$  の減少列  $\langle p_n : n \in \mathbb{N} \rangle$  を

1.  $p_0 = p$ .
2.  $p_{n+1} \in D_n$

となるようにとる.  $F = \{q \in \mathbb{P} : \exists n \in \mathbb{N} (p_n \leq q)\}$  とすると  $F$  は  $M$ -generic filter になる.

## Theorem 21 (Generic extension の基本性質)

$M$ : ctm,  $\mathbb{P} \in M$ : forcing notion,  $F \subseteq \mathbb{P}$ :  $M$ -generic filter

このとき  $M[F]$  を  $M$  による  $\mathbb{P}$  の generic extension とよび, 次の性質が成り立つ:

1.  $M \subseteq M[F]$ .
2.  $F \in M[F]$ .
3.  $M[F]$  は countable, transitive, かつ  $M[F] \models \varphi$  ( $\varphi \in \text{ZFC}$ ).
4.  $M[F]$  は上の (1)–(3) を満たすもののの中で最小のもの.

また,  $M$  を  $M[F]$  の ground model と呼ぶ.

$F \in M[F]$ ;

$\Gamma = \{\langle \check{p}, p \rangle : p \in \mathbb{P}\}$  とすると,  $\Gamma \in M$  かつ  $\Gamma[F] = F$  になる.

先の Theorem は次のように述べる事が可能:

## Theorem 22

$\varphi_0, \dots, \varphi_n$ : ZFC の公理.

このとき, ZFC の公理  $\psi_0, \dots, \psi_m$  が存在して, ZFC から次が証明可能:  
任意の  $M$ :  $\psi_0, \dots, \psi_m$  の ctm,  $\mathbb{P} \in M$ : forcing notion,  $F \subseteq \mathbb{P}$ :  $M$ -generic filter に対して,

1.  $M \subseteq M[F]$ .
2.  $F \in M[F]$ .
3.  $M[F]$  は countable, transitive, かつ  $M[F] \models \varphi_i$  ( $i \leq n$ ).
4.  $M[F]$  は上の (1)–(3) を満たすものの中で最小のもの.

## Fact 4 (Cohen)

$M$ : ctm

このとき, forcing notion  $\mathbb{P} \in M$  で,  $M$  の  $\mathbb{P}$  による任意の generic extension で連続体仮説の否定が成り立つものが存在する.

Sketch:

- $2^{\aleph_0} := \mathbb{N}$  から  $\mathbb{N}$  への写像全体の濃度

なので,  $M$  に forcing で  $\mathbb{N}$  から  $\mathbb{N}$  への写像をたくさん付け加えればよい.

- $\mathbb{P} := \mathbb{N}$  から  $\mathbb{N}$  への有限部分写像全体
- $p \leq q \iff p \supseteq q$ .
- $\langle \mathbb{P}, \leq, \emptyset \rangle$  は forcing notion, かつ  $\mathbb{P} \in M$ .

$F \subseteq \mathbb{P}$  を  $M$ -generic filter とする. 写像  $f$  を

1.  $\text{dom}(f) = \bigcup_{p \in F} \text{dom}(p)$ .
2.  $f(n) = p(n)$  for some  $p \in F$  with  $n \in \text{dom}(p)$ .

とする. well-defined であることは  $F$  が filter であることからわかる;  
 $p, q \in F$ ,  $n \in \text{dom}(p) \cap \text{dom}(q)$  に対して,  $r \in F$  で  $r \leq p, q$  となるものがある. このとき  $r(n) = p(n) = q(n)$  となる.

また,  $M$ -generic であることから次も成り立つ:

1.  $\text{dom}(f) = \mathbb{N}$ .
2.  $g \in M$  が  $\mathbb{N}$  から  $\mathbb{N}$  への写像ならば,  $g \neq f$ .

(1) は各  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $D = \{p \in \mathbb{P} : n \in \text{dom}(p)\}$  は  $\mathbb{P}$  の dense set. また  $D$  は定義可能なので,  $M$  の内包公理から  $D \in M$ .  $F$  は  $M$ -generic なので  $F \cap D \neq \emptyset$ .  $p \in F \cap D$  を取ると,  $n \in \text{dom}(p)$  なので  $n \in \text{dom}(f)$ .  $f$  は  $F$  から簡単に定義できるので,  $f \in M[F]$ . よって,  $M[F]$  は  $M$  に比べて  $\mathbb{N}$  から  $\mathbb{N}$  の写像が**増えている**. generic extension を取ることを“繰り返して”さらに写像を増やし, 最終的に連続体仮説の否定が成り立つように出来る.

- ZFC+ 連続体仮説の否定のモデルが構成できる

⇒ ZFC+ 連続体仮説の否定 は無矛盾?

先に触れたように, ZFC の transitive model の存在は  $\text{ZFC} + \text{CON}(\text{ZFC})$  から証明できず, このままでは

$$(\text{CON}(\text{ZFC}) \Rightarrow) \text{CON}(\text{ZFC} + \text{連続体仮説の否定})$$

の証明にならない.

以下のようなトリックを使う;

1. ZFC から連続体仮説 (CH) が導けるなら, ZFC の有限個の公理  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  から CH が導ける.
2. つまり  $\vdash \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i \rightarrow \text{CH}$ .
3. ZFC の有限断片  $\Gamma$  で, ZFC から次が証明可能である:  
 $M$  が  $\Gamma$  の ctm ならば, ある forcing notion  $\mathbb{P} \in M$  と  $M$ -generic filter  $F$  で

$$M[F] \models \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i, \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i \rightarrow \text{CH}, \neg \text{CH}$$

となるものがある.

4. ZFC から  $\bigwedge_{i \leq n} \varphi_i$  の ctm の存在は証明できるので,
5.  $\text{ZFC} \vdash \text{"}\exists M \models \text{CH} \wedge \neg \text{CH}"$  となり矛盾.

## 余談

- (ごく) 一部の集合論研究者は (存在しない)  $\mathbb{P}$  の  $\mathbf{V}$ -generic filter  $F$  をとり,  $\mathbf{V}$  の generic extension  $\mathbf{V}[F]$  を考える, というような議論を平気で行っている.
- このような議論を行っていい, という背景には先のようにすれば, いざとなったら “この議論は ZFC の有限断片の ctm  $M$  に対して行っているものである” と逃げることができるから.
- 実際のところ, “ZFC +  $\neg\text{CH}$  のモデル  $M[F]$  が forcing で作る” “ $\mathbf{V}[F]$  で  $\neg\text{CH}$  が成り立つ” と簡単に考えるほうが色々と捗る (気がする).

## Generic extension の frame

ctm  $M$  をひとつ固定し,  $\mathcal{W}_n$  を次のように定義:

1.  $\mathcal{W}_0 = \{M\}$ .
2.  $\mathcal{W}_{n+1} = \{N : N \text{ は } \mathcal{W}_n \text{ の generic extension}\}$   
 $\cup \{N : N \text{ は } \mathcal{W}_n \text{ の元の ground model}\}.$

$\mathcal{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n$  とする.

### Lemma 5

$\mathcal{W}$  は濃度  $2^{\aleph_0}$  を持つ集合になる.



$\mathcal{W}$  上の二項関係  $\mathcal{R}$  を,

$$N_0 \mathcal{R} N_1 \iff N_1 \text{ は } N_0 \text{ の generic extension}$$

とする.  $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$  は明らかに frame!

### Lemma 6

1.  $\mathcal{F}$  は反射的
2.  $\mathcal{F}$  は推移的.
3.  $\mathcal{F}$  は反対称的.
4.  $\mathcal{F}$  は有向的ではない.
5.  $\mathcal{F}$  には  $\mathcal{R}$  の無限上昇列, 無限減少列が有る.
6. その他, 様相論理的にあまり良い性質は持たない

Sketch:

- 反射的: trivial forcing  $\mathbb{P} = \{\emptyset\}$  を考える.  $F = \mathbb{P}$  は  $M$ -generic filter になり,  $M[F] = M$  である.
- 推移的: forcing product (forcing の iteration が必要!)
- 反対称的:  $N_0 \mathcal{R} N_1$  なら  $N_0 \subseteq N_1$ ,  $N_1 \mathcal{R} N_0$  なら  $N_1 \subseteq N_0$ , よって  $N_0 = N_1$ .
- 有向的ではない:

## Lemma 7

$M$ : ctm

この時, forcing notion  $\mathbb{P} \in M$  と  $\mathbb{P}$  の  $M$ -generic filter  $F_0, F_1$  で  $M[F_0]$  と  $M[F_1]$  が共通の generic extension を持たないものが取れる.

- 上昇列:  $M \subsetneq M[F_0] \subsetneq M[F_0][F_1] \cdots$  と取れる.
- 減少列:

### Lemma 8

$M$ : *ctm*

この時,  $M$  の *generic extension*  $\{N_i : i \in \mathbb{N}\}$  で  $N_i$  が  $N_{i+1}$  の真の *generic extension* になるものが取れる.

### Remark 23

$M$  の取り方によって,  $\mathcal{F}$  の構造は変わってくる;

- $\mathcal{F}$  が最小元を持つことがある.
- $\mathcal{F}$  の極小元は存在しないこともある.

# Forcing relation

## Definition 24

$\mathbb{P}$ : forcing notion,  $p \in \mathbb{P}$

$D \subseteq \mathbb{P}$  が **dense below  $p$**

$\iff$  任意の  $q \leq p$  に対して,  $r \in D$  で  $r \leq q$  となるものがある.

## Definition 25

$\mathbb{P}$  を forcing notion,  $p \in \mathbb{P}$  とする.  $\varphi(v_0, \dots, v_n)$  を  $\mathcal{L}_{ZF}$  の論理式,  $\sigma_0, \dots, \sigma_n$  を  $\mathbb{P}$ -name とする.  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$  を  $\varphi$  の構成に関する帰納法で次のように定義する:

1.  $\varphi := v_0 \in v_1$  のとき,  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \sigma_0 \in \sigma_1$   
 $\iff \{q \in \mathbb{P} : \exists \langle \tau, r \rangle \in \sigma_1 (q \leq r \wedge q \Vdash_{\mathbb{P}} \tau = \sigma_0)\}$  が  $p$  の下で dense.
2.  $\varphi := v_0 = v_1$  のとき,  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \sigma_0 = \sigma_1$   
 $\iff$  任意の  $\mathbb{P}$ -name  $\tau$  と  $q \leq p$  に対して, もしある  $r \in \mathbb{P}$  で  $\langle \tau, r \rangle \in \sigma_0 \cup \sigma_1$  ならば
$$q \Vdash_{\mathbb{P}} \tau \in \sigma_0 \iff q \Vdash_{\mathbb{P}} \tau \in \sigma_1.$$
3.  $\varphi := \psi_0 \wedge \psi_1$  のとき,  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \psi_0 \wedge \psi_1$   
 $\iff p \Vdash_{\mathbb{P}} \psi_0$  かつ  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \psi_1$ .

## 続き

4.  $\varphi := \neg\psi$  のとき,  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \neg\psi$

$\iff$  任意の  $q \leq p$  に対して  $q \not\Vdash_{\mathbb{P}} \psi$ .

5.  $\varphi := \exists v \psi(v)$  のとき,  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \exists v \psi(v)$

$\iff \{q \leq p : \mathbb{P}\text{-name } \tau \text{ で } q \Vdash_{\mathbb{P}} \psi(\tau) \text{ となるものがある} \}$  が  $p$  の下で dense.

また,  $1_{\mathbb{P}} \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$  のときは  $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$  と書く.

## Remark 26

この定義も循環しているので, 正当化のためには適当な整礎関係を定義して, その元での再帰的定義を行なう必要がある.

## Remark 27

$p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$  は, 与えられた  $\varphi$  に対して,  $\mathcal{L}_{ZF}$  の論理式  $\Phi_{\varphi}(\mathbb{P}, p, \sigma_0, \dots, \sigma_n)$  として定義されるスキームである.

## Lemma 9 (Forcing relation の基本性質)

$\vec{\sigma}$ :  $\mathbb{P}$ -name の列,  $p \in \mathbb{P}$

1.  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\vec{\sigma})$ ,  $q \leq p$  ならば  $q \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\vec{\sigma})$ .
2.  $\Phi(\vec{v})$  が集合論の論理式, 述語論理から仮定なしで証明可能ならば  $\Vdash_{\mathbb{P}} \Phi(\vec{\sigma})$ .
3.  $p \nVdash_{\mathbb{P}} \perp$ .
4.  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\vec{\sigma})$  かつ  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\vec{\sigma}) \rightarrow \psi(\vec{\sigma})$  ならば  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \psi(\vec{\sigma})$ .
5.  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\vec{\sigma}) \wedge \psi(\vec{\sigma}) \iff p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\vec{\sigma})$  かつ  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \psi(\vec{\sigma})$ .
6.  $\varphi$  が ZFC の公理ならば  $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ .
7.  $p \nVdash_{\mathbb{P}} \varphi(\vec{\sigma})$  ならば,  $q \leq p$  で  $q \Vdash_{\mathbb{P}} \neg \varphi(\vec{\sigma})$  となるものがある.
8.  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \exists v \varphi(v)$  ならば, ある  $\mathbb{P}$ -name  $\sigma$  で  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\sigma)$  となるものがある.

Forcing relation は次を意図して定義されている:

### Theorem 28 (Forcing Theorem 1)

$M$ : ctm,  $\mathbb{P} \in M$ : forcing notion,  $p \in \mathbb{P}$ ,  $\vec{\sigma} \in M$ :  $\mathbb{P}$ -name の列  
このとき, 次は同値:

1.  $M \models "p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\vec{\sigma})"$ .
2.  $\mathbb{P}$  の任意の  $M$ -generic filter  $F$  に対して,  $p \in F$  ならば  
 $M[F] \models \varphi(\vec{\sigma}[F])$ .



## Theorem 29 (Forcing Theorem 2)

$M$ : ctm,  $\mathbb{P} \in M$ : forcing notion,  $p \in \mathbb{P}$ ,  $\vec{\sigma} \in M$ :  $\mathbb{P}$ -name の列  
 $F$  を  $\mathbb{P}$  の  $M$ -generic filter とする. もし

$$M[F] \models \varphi(\vec{\sigma}[F])$$

ならば, ある  $p \in F$  で

$$M \models "p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\vec{\sigma})"$$

## Remark 30

一般に, forcing relation  $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$  は transitive model に対して絶対的にならない.

したがって,

- $\mathbf{V}$  での forcing  $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$
- transitive model  $M$  中での forcing  $M \models \text{“}\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi\text{”}$

は一般に同値にならない.

## Remark 31

Forcing Theorem は, ZFC の ctm の存在を仮定せずとも, 次のような形で述べることができる:

任意に与えられた  $\mathcal{L}_{ZF}$  の論理式  $\varphi(\vec{v})$  に対して, 有限個の ZFC の公理  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  が存在して, 次が ZFC から証明可能:

$M$  が  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  の ctm ならば, 任意の forcing notion  $\mathbb{P} \in M$ ,  $p \in \mathbb{P}$  と  $\mathbb{P}$ -name の列  $\vec{\sigma} \in M$  に対して次は同値になる.

1.  $M \models "p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\vec{\sigma})"$ .
2.  $\mathbb{P}$  の任意の  $M$ -generic filter  $F$  に対して,  $p \in F$  ならば  $M[F] \models \varphi(\vec{\sigma}[F])$ .

## 余談

generic extension の時と同じように, 大抵の集合論研究者は次のような議論を平気で行う:

- $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$  である. なぜなら,
- 任意にとった  $\mathbb{P}$  の  $\mathbf{V}$ -generic filter  $F$  に対して,  $\mathbf{V}[F]$  で  $\varphi$  が成り立つから.

このような議論が問題を引き起こさない背景には, 先のように ZFC の有限断片の ctm  $M$  に対する議論に帰着できるからである.

## Definition 32

$\mathbb{P}$ : forcing notion,  $p \in \mathbb{P}$  に対して,

$\mathbb{P} \restriction p := \langle \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}, \leq, p \rangle$

$\mathbb{P} \restriction p$  は明らかに  $p$  を最大元に持つ forcing notion.

## Lemma 10

$\mathbb{P}$ : forcing notion,  $p \in \mathbb{P}, \varphi: \mathcal{L}_{ZF}$  の閉論理式

この時次は同値:

1.  $p \Vdash \varphi$ .
2.  $\Vdash_{\mathbb{P} \restriction p} \varphi$ .

$\mathbb{P}$ : forcing notion,  $p \in \mathbb{P}, \varphi: \mathcal{L}_{ZF}$  の閉論理式  
この時次は同値:

1.  $p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ .
2.  $\Vdash_{\mathbb{P} \restriction p} \varphi$ .

Sketch: (1)  $\Rightarrow$  (2).

$\mathbb{P} \restriction p$  の  $\mathbf{V}$ -generic filter  $F$  をとる. この時  $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists r \in F (r \leq q)\}$  は  $\mathbb{P}$  の  $\mathbf{V}$ -generic filter になる.

$G$  は  $F$  から定義できるので  $G \in \mathbf{V}[F]$ .  $\mathbf{V}[G]$  の最小性から  $\mathbf{V}[G] \subseteq \mathbf{V}[F]$ .

逆に,  $F = G \cap \mathbb{P} \restriction p$  なので,  $F \in \mathbf{V}[G]$ . よって  $\mathbf{V}[F]$  の最小性から

$\mathbf{V}[F] \subseteq \mathbf{V}[G]$  となり,  $\mathbf{V}[F] = \mathbf{V}[G]$ .

$p \in G$  なので Forcing Theorem から  $\mathbf{V}[G] \models \varphi$ . よって  $\mathbf{V}[F] \models \varphi$ . 再び Forcing Theorem から  $\mathbf{V} \models \Vdash_{\mathbb{P} \restriction p} \varphi$ .