

数学基礎論サマースクール 2015

強制法と様相論理 1

薄葉 季路

神戸大学

2015 年 8 月 19 日

- 目的: 強制法を用いて定義される「強制様相論理」を中心に, 強制法と様相論理に関するいくつかのトピックの解説.
- 一回目: 概観, 集合論の基礎
- 二回目: 強制拡大, 強制関係
- 三回目: 強制様相論理, 関連話題

- 時間の都合上, 集合論と強制法に関しては最低限の説明のみ与える.
- 公理的集合論や強制法に関してきちんと学びたい方はちゃんとした教科書を読むことをお勧めする:
 1. K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland, 1980.
 2. K. Kunen *Set theory.* Studies in Logic, 34. College Publications, 2011.
 3. ケネス キューネン (著), 藤田 博司 (翻訳), 集合論—独立性証明への案内. 日本評論社, 2008. ((1) の和訳)
 4. 渚野昌, 構成的集合と公理的集合論入門. in 田中一之 (編), ゲーデルと20世紀の論理学第4巻, 東京大学出版会, 2007.
 5. 田中尚夫, 公理的集合論. 培風館, 1982.
 6. 倉田令二郎, 篠田寿一, 公理的集合論. 河合文化教育研究所, 1996.

- 集合論, 強制法をある程度知った方で強制様相論理に興味を持った方は, 元論文をあたることをお勧めする:
 1. J. D. Hamkins, B. Löwe, *The modal logic of forcing*. Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), no. 4, 1793–1817.
 2. A. Block, B. Löwe, *Modal logic and mutiveses*. 数理解析研究所講究録 1949 (2015), 5–23.
 3. J. D. Hamkins, *A simple maximality principle*. J. Symbolic Logic 68 (2003), no. 2, 527–550.
 4. J. D. Hamkins, G. Leibman, B. Löwe, *Structural connections between a forcing class and its modal logic*. to appear in Israel Journal of Mathematics.
 5. J. D. Hamkins, B. Löwe, *The modal logic of forcing*. Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), no. 4, 1793–1817.
 6. T. C. Inamdar, B. Löwe, *The Modal Logic of Inner Models*. submitted

ZFC 集合論

- ZFC 公理系: 標準的な集合論公理系
- ほぼすべての数学を記述, 展開可能な非常に強力な公理系
- 数学で証明可能 $\equiv$ ZFC から証明可能
- 一方, 連続体仮説のような, 自然な独立命題がいくつも見つかっている.

Forcing(強制法)って?

- Cohen(1963) によって開発された手法.
- 与えられた ZFC のモデルを拡張し, 望ましい性質を持つモデルを構成する手法.
- ZFC と与えられた命題 φ が無矛盾であることを構文論的に証明する手法.

Theorem 1 (Cohen 1963)

ZFC が無矛盾ならば ZFC+ “連続体仮説の否定” も無矛盾である.

1. forcing の意味論的記側面=generic extension (forcing extension)
2. forcing の構文論的側面=forcing relation

Forcing extension って?

- M : ZFC の集合モデル,
- $\mathbb{P} \in M$: 推移的かつ反射的な順序関係 preorder
- $\mathbb{P}$ 上の filter $F \subseteq \mathbb{P}$ が generic と呼ばれる性質を持つとき, 次を満たす ZFC のモデル N が構成可能
 1. $M \subseteq N$.
 2. $F \in N$.
 3. N は (1), (2) を満たすものの中で最小のもの.
- この N を M の $\mathbb{P}$ による generic extension, M を N の ground model と呼ぶ.

Theorem 2 (Cohen)

与えられた ZFC の集合モデル M に対して, preorder $\mathbb{P} \in M$ をうまく選ぶことで, M の $\mathbb{P}$ による generic extension N で

$N \models$ 連続体仮説の否定

が成り立つものを構成できる.

- ここで ZFC のモデル M を一つ固定して, $\mathcal{W}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) を次のように構成する:
 1. $\mathcal{W}_0 = \{M\}$.
 2. $\mathcal{W}_{n+1} = \{N : N \text{ は } \mathcal{W}_n \text{ の元の generic extension}\} \cup \{N : N \text{ は } \mathcal{W}_n \text{ の元の ground model}\}$
- $\mathcal{W} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n$
- $\mathcal{W}$ は M , M の generic extension と ground model, M の generic extension の generic extension, generic extension の ground model... の全体.
- $\mathcal{W}$ 上の二項関係 $\mathcal{R}$ を次のように定義:

$$N_0 \mathcal{R} N_1 \iff N_1 \text{ は } N_0 \text{ の generic extension.}$$
- $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ は Kripke frame.

- ZFC のモデル=(数学全体の) 世界
- $\mathcal{W}$ の各世界で連続体仮説などの様々な命題の肯定, 否定が成り立っている.
- $\mathcal{W}$ =(文字通りの意味での) 可能世界の集まり.

$\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ は非常に (哲学的, 数学的に) 面白そうに見える, なんだか凄そうな frame

Theorem 3

1. $\mathcal{F}$ は反射的
2. $\mathcal{F}$ は推移的
3. $\mathcal{F}$ は directed **ではない**.
4. その他, $\mathcal{F}$ は様相論理的には**あまり面白い性質を持たない**

- この frame が S4-frame であることにはたぶん意味がある:
様相論理の言葉を用いて, S4 を構成することで forcing を fomulate
することが可能:

R. Smullyan, M. Fitting, *Set theory and the continuum problem*.
Oxford Logic Guides, 34. Oxford Science Publications, 1996.

- この frame は **set-generic multiverse** と呼ばれ, 主に集合論的観点から研究が行なわれている.

Forcing relation って?

- 集合論の論理式 φ と preorder $\mathbb{P}$ に対して, forcing relation

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$$

($\mathbb{P}$ は φ を force する) が定義される.

Theorem 4 (Forcing relation の基本性質)

1. Φ が集合論の論理式で述語論理において仮定なしで証明可能ならば $\Vdash_{\mathbb{P}} \Phi$.
2. $\nVdash_{\mathbb{P}} \perp$.
3. $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ かつ $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi \rightarrow \psi$ ならば $\Vdash_{\mathbb{P}} \psi$.
4. $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi \wedge \psi \iff \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ かつ $\Vdash_{\mathbb{P}} \psi$.
5. φ が ZFC の公理ならば $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$.
一方, 次は成り立たない.
6. $\nVdash_{\mathbb{P}} \varphi \iff \Vdash_{\mathbb{P}} \neg \varphi$ $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi \vee \psi \iff \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ または $\Vdash_{\mathbb{P}} \psi$.

Theorem 5 (Cohen (1963))

preorder $\mathbb{P}$ で

$\Vdash_{\mathbb{P}}$ “連続体仮説の否定”

となるものがある.

これで $\text{ZFC} + \text{“連続体仮説の否定”}$ が consistent であることがわかる;

1. 矛盾しているならば, ZFC の有限個の公理 $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ から連続体仮説 (CH) が導ける.
2. このとき $\vdash \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i \rightarrow \text{CH}$.
3. したがって, $\text{ZFC} \vdash \Vdash_{\mathbb{P}} \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i \rightarrow \text{CH}$.
4. 一方 $\text{ZFC} \vdash \Vdash_{\mathbb{P}} \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i$ なので,
5. $\text{ZFC} \vdash \Vdash_{\mathbb{P}} \text{CH}$.
6. よって $\text{ZFC} \vdash \Vdash_{\mathbb{P}} \text{CH} \wedge \neg \text{CH}$ となり, 矛盾.

Theorem 6 (Forcing Theorem)

集合論のモデル M , preorder $\mathbb{P} \in M$ と集合論の論理式 φ について, 次は同値:

1. $M \models \text{"}\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi\text{"}$.
2. M の $\mathbb{P}$ による任意の generic extension N に対して $N \models \varphi$.

これにより, 様相論理のオペレーター $\Box\varphi$ と $\Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$ に明らかな類似を見ることができる:

1. $\Box\varphi \iff$ 任意の到達可能な世界で φ が成り立つ.
2. $\forall \mathbb{P} \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi \iff$ 任意の generic extension で φ が成り立つ.

Definition 7

集合論の論理式 φ に対して,

1. $\Box\varphi \iff \forall \mathbb{P}, \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$.
2. $\Diamond\varphi \iff \exists \mathbb{P}, \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi$.

Theorem 8

集合論の論理式 φ に対して, $\Diamond\varphi \iff \neg\Box\neg\varphi$.

Modal Logic of Forcingって?

$\Box$, $\Diamond$ を先のように見たときに時に, “正しい” 命題様相全体.

Definition 9

様相論理の論理式に集合論の閉論理式を割り当てる operator H が次を満たす時, H を Hamkins translation と呼ぶ:

1. $H(\perp) = \perp$.
2. $H(\varphi \wedge \psi) = H(\varphi) \wedge H(\psi)$.
3. $H(\neg\varphi) = \neg H(\varphi)$.
4. $H(\Box\varphi) = \forall \mathbb{P} (\Vdash_{\mathbb{P}} H(\varphi))$

Definition 10

Modal Logic of Forcing, MLF, とは, 任意の Hamkins translation H に対して

$$\text{ZFC} \vdash H(\varphi)$$

となる様相論理式 φ 全体である.

Theorem 11 (Hamkins)

MLF は S4.2 を含む正規命題様相論理.

Question 12

MLF はどのような様相論理か?

Theorem 13 (Hamkins-Löwe)

MLF は S4.2 とちょうど等しい.

$S5 := S4 + \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi.$

Theorem 14 (Hamkins, Stavi-Väänänen)

$T := ZFC + \{\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi : \varphi \text{ は集合論の論理式} \}$ は無矛盾である.

$\varphi \in MLF^T \iff$ 任意の Hamkins translation H に対して $T \vdash H(\varphi)$
とすると, $MLF^T = S5$.

この意味で, MLF は (ある意味で) $S5$ にもなりうる.

集合論の基本

Definition 15

集合論の言語 $\mathcal{L}_{ZF} := “\in”$ と $“=”$ の二つの記号からなる言語

Definition 16

下記の $\mathcal{L}_{ZF}$ の閉論理式からなる公理系を **ZFC** と呼ぶ:

1. (等号公理) $\forall u \forall v (u = v \leftrightarrow \forall w (w \in u \leftrightarrow w \in v))$.
2. (対の公理) $\forall u \forall v \exists w (u, v \in w)$.
3. (和集合公理) $\forall u \exists v \forall w (w \in u \rightarrow w \subseteq v)$.
4. (冪集合公理) $\forall u \exists v \forall w (w \subseteq u \rightarrow w \in v)$.
5. (無限公理) $\exists u (u \neq \emptyset \wedge \forall v \in u (\{v\} \in u))$.
6. (正則性公理) $\forall u (u \neq \emptyset \rightarrow \exists v \in u (u \cap v = \emptyset))$.
7. (内包公理) $\forall u \forall v_0, \dots, v_n \exists w \forall x (x \in w \leftrightarrow x \in u \wedge \varphi(x, v_0, \dots, v_n))$.
8. (置換公理) $\forall u \forall v_0, \dots, v_n (\forall w \in u \exists! x \varphi(w, x, v_0, \dots, v_n) \rightarrow \exists y \forall w \in u \exists x \in y (\varphi(w, x, v_0, \dots, v_n)))$.
9. (選択公理) 任意の空でない集合族は選択関数を持つ.

以後出てくる命題や定義は、特に何も言わなければ ZFC から証明できる定理、あるいは ZFC 内での定義である。

公理的集合論では、すべての存在は「集合」である。よって関係、写像なども全て集合で表す必要がある。

Definition 17

集合 x, y に対して、順序対 $\langle x, y \rangle$ を

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

とする。

Lemma 1

集合 x_0, y_0, x_1, y_1 に対して、

$$\langle x_0, y_0 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \iff x_0 = x_1 \text{ かつ } y_0 = y_1.$$

Definition 18

X, Y : 集合

1. $X \times Y = \{\langle x, y \rangle : x \in X, y \in Y\}$.
2. $f \subseteq X \times Y$ が X から Y への写像
 $\iff \forall x \in X \exists! y \in Y (\langle x, y \rangle \in f)$
3. $R \subseteq X \times X$ を X 上の二項関係と呼ぶ.
4. $x R y \iff \langle x, y \rangle \in R$.

整礎関係

Definition 19

X : 集合

X 上の二項関係 R が X の整礎関係とは,

1. 任意の X の空でない部分集合 $Y \subseteq X$ は R に関する極少元を持つ, すなわち

$x_0 \in Y$ で, 任意の $y \in Y$ に対して $y R x_0$ とならないものがある.

$\iff X$ の元からなる列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ で $x_{n+1} R x_n$ となるものは存在しない.

Remark 20

整礎関係 R において, 推移性 ($x R y R z \Rightarrow x R z$) は特に仮定しない.

整礎関係の例

- $\mathbb{N}$ の通常的大小関係 $<$ は $\mathbb{N}$ の整礎関係である.
- X : 集合 この時所属関係 $\in$ を X 上に制限した二項関係は X の整礎関係である (ZFC の公理)
- X : 集合 この時

$$y R x \iff \exists z (\langle y, z \rangle \in x)$$

は X 上の整礎関係である.

超限帰納法

Fact 2

$Y \subseteq \mathbb{N}$ が次を満たすならば $Y = \mathbb{N}$ である:

$$\forall n \in \mathbb{N} (\forall m \in \mathbb{N} (m < n \rightarrow \varphi(m)) \rightarrow \varphi(n)).$$

Lemma 3

X : 集合, R : X 上の整礎関係

1. 任意の $Y \subseteq X$ に対して, 次が成り立つならば $Y = X$ である:

$$\forall x \in X (\forall y \in X (y R x \rightarrow y \in Y) \rightarrow x \in Y).$$

2. $\varphi(v)$: 集合論の論理式. この時, 次が成り立てば任意の $x \in X$ について $\varphi(x)$ が成り立つ:

$$\forall x \in X (\forall y \in X (y R x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)).$$

再帰的定義

Lemma 4 (写像の再帰的定義)

X : 集合, R : X 上の整礎関係, A : 集合

Φ を, 各 $x \in X$ と写像 $g : \{y \in X : y R x\} \rightarrow A$ に対して A の元 $\Phi(x, g)$ を割り当てる写像とする. この時, 次を満たす写像 $f : X \rightarrow A$ がただ一つ存在する:

- 各 $x \in X$ に対して,

$$f(x) = \Phi(x, f \upharpoonright \{y \in X : y R x\}).$$

クラス

Definition 21

$\varphi(v)$: 集合論の論理式

この時集まり $\{x : \varphi(x)\}$ を (φ によって定義される) **クラス** と呼ぶ.

クラスを $\mathbf{C}$ などで表す.

Remark 22

$\mathbf{C}$ が φ で定義されるクラスの時, $x \in \mathbf{C}$ は $\varphi(x)$ の書き換えに過ぎない.

クラスの例:

1. $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$ (universe)
2. $\{x : \exists y, z (x = \langle y, z \rangle)\}$.
3. $\mathbf{C}$ がクラスの時, $\mathbf{C} \times \mathbf{C} = \{\langle x, y \rangle : x, y \in \mathbf{C}\}$.

クラス整礎関係

Definition 23

$\mathbf{C}, \mathbf{D}$: クラス

1. クラス $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ のサブクラス $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{C} \times \mathbf{D}$ で
 $\forall x \in \mathbf{C} \exists! y \in \mathbf{D} (\langle x, y \rangle \in \mathbf{F})$ となるものを **クラス写像** と呼ぶ.
2. $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ のサブクラスを $\mathbf{C}$ の **クラス二項関係** と呼ぶ.

Remark 24

これらの定義は ZFC 内の定義ではない.

クラス整礎関係

Definition 25

$\mathbf{C}$ のクラス二項関係 $\mathbf{R}$ が整礎とは,

任意の $\mathbf{C}$ の部分集合 $X \subseteq \mathbf{C}$ が $\mathbf{R}$ に関する極小元を持つこと.

$\iff \mathbf{C}$ の元からなる列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ で $x_{n+1} \mathbf{R} x_n$ となるものが存在しない.

1. $\mathbf{V}$ のクラス二項関係 $\in = \{ \langle x, y \rangle : x \in y \}$ は $\mathbf{V}$ 上の整礎関係である.
2. $x \mathbf{R} y \iff \exists z (\langle y, z \rangle \in x)$ は $\mathbf{V}$ 上の整礎関係である.

クラス上の超限帰納法

Lemma 5

$\mathbf{C}$: クラス, $\mathbf{R}$: $\mathbf{C}$ 上の整礎関係,

任意の $x \in \mathbf{C}$ に対して $\{y \in \mathbf{C} : y \mathbf{R} x\}$ が集合になっているとする.

$\varphi(v)$: 集合論の論理式

もし次が成り立つならば, 任意の $x \in \mathbf{C}$ に対して $\varphi(x)$ が成り立つ:

$$\forall x \in \mathbf{C} (\forall y \in \mathbf{C} (y \mathbf{R} x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)).$$

集合上の整礎関係に関する超限帰納法, 写像の再帰的定理は ZFC のただひとつの論理式で表せる ZFC の定理であるが, クラス上の超限帰納法は各クラス $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ と各論理式 φ に対するスキームである:

クラス $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, 論理式 φ に対して, 次が ZFC から証明可能:

- $\mathbf{R}$ が $\mathbf{C}$ の整礎関係であり,
- $\forall x \in \mathbf{C} \exists Z (\forall y \in \mathbf{C} (y \in Z \leftrightarrow y \mathbf{R} x),$ かつ
- $\forall x \in \mathbf{C} (\forall y \in \mathbf{C} (y \mathbf{R} x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x))$ ならば
- $\forall x \in \mathbf{C} (\varphi(x)).$

クラス写像の再帰的定義

Lemma 6

$\mathbf{C}$: クラス, $\mathbf{R}$: $\mathbf{C}$ 上の整礎関係, $\mathbf{D}$: クラス

任意の $x \in \mathbf{C}$ に対して $\{y \in \mathbf{C} : y \mathbf{R} x\}$ が集合になっているとする.

Φ を, 各 $x \in \mathbf{C}$ と写像 $g : \{y \in \mathbf{C} : y \mathbf{R} x\} \rightarrow \mathbf{D}$ に対して $\mathbf{D}$ の元 $\Phi(x, g)$ を割り当てるクラス写像とする. この時, 次を満たすクラス写像 $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ が存在する:

- 各 $x \in \mathbf{C}$ に対して,

$$f(x) = \Phi(x, f \upharpoonright \{y \in \mathbf{C} : y \mathbf{R} x\}).$$

クラス述語の再帰的定義

Definition 26

S : 集合

集合 x が **S -name** とは,

任意の $y \in x$ に対して, $s \in S$ と S -name z で $y = \langle z, s \rangle$ となるものが存在する.

この定義はある意味で循環しており, well-defined に見えない; x が S -name である事に, x の元が S -name であることを使っている.

この定義は, 次のように クラス写像の再帰的定義を用いて正当化できる:
V 上のクラス二項関係 **R** を,

$$y \mathbf{R} x \iff \exists z (\langle y, z \rangle \in x)$$

と定義する. **R** は整礎であり, かつ $\{y : y \mathbf{R} x\}$ は集合になる.

ここでクラス写像 Φ を, 各 x と $g : \{y : y \mathbf{R} x\} \rightarrow \mathbf{V}$ に対して

$$\Phi(x, g) = \begin{cases} 1 & \text{各 } y \mathbf{R} x \text{ に対して } g(y) = 1 \text{ かつ} \\ & s \in S \text{ で } \langle y, s \rangle \in x \text{ となるものが存在する.} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

補題よりクラス写像 $\mathbf{f} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ で

$$\mathbf{f}(x) = \Phi(x, \mathbf{f} \upharpoonright \{y : y \mathbf{R} x\})$$

となるものが取れる. この時,

$$\mathbf{f}(x) = 1 \iff \forall y \in x \exists z \exists s \in S (y = \langle z, s \rangle \wedge \mathbf{f}(z) = 1)$$

となる. $\mathbf{f}(x) = 1$ の時, x を S -name と呼ぶ事にすればよい.