様相論理入門 第3回

佐野 勝彦
北陸先端科学技術大学院大学
情報科学研究科
v-sano@jaist.ac.jp

2015年8月20日（木）

本日の講義内容

- シーケント計算体系とカット除去定理
- 様相論理のいくつかの現代的発展
- 様相論理の関係意味論の歴史

シーケント

論理式の有限集合のペアがシーケント：

$$\Gamma \Rightarrow \Delta$$

- 「Γ の全てを仮定すると Δ のどれかが従う」
- 式 $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ へと翻訳可能 ($\bigwedge \varnothing := \top$, $\bigvee \varnothing := \bot$)
- 略記：

$$\Gamma, \varphi := \Gamma \cup \{ \varphi \}, \quad \Gamma, \Delta := \Gamma \cup \Delta, \quad \Box \Gamma := \{ \Box \gamma \mid \gamma \in \Gamma \}$$ 等

様相論理のシーケント計算 cf. 大西・松本 (1957)

始式

$$\varphi \Rightarrow \varphi \quad (Id) \qquad\qquad \bot \Rightarrow \quad (\bot)$$

構造規則（弱化規則）

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (\Rightarrow w) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (w \Rightarrow)$$

論理規則

$$\frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\ (\Rightarrow \to) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\to \Rightarrow)$$

□ に関する論理規則

K

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi}\ (\Box)$$

KT

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi}\ (\Box) \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\Box \Rightarrow)$$

S4

$$\frac{\Box\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi}\ (\Rightarrow \Box) \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\Box \Rightarrow)$$

S5

$$\frac{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta, \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta, \Box\varphi}\ (\Rightarrow \Box_{\mathbf{S5}}) \qquad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\Box \Rightarrow)$$

G(K) で証明可能なシーケント

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{p \Rightarrow q, p}\,(\Rightarrow w) \qquad \dfrac{q \Rightarrow q}{q, p \Rightarrow q}\,(w \Rightarrow)}{p \to q, p \Rightarrow q}\,(\to\Rightarrow)}{\Box(p \to q), \Box p \Rightarrow \Box q}\,(\Box)}{\Box(p \to q) \Rightarrow (\Box p \to \Box q)}\,(\Rightarrow\to)}{\Rightarrow \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)}\,(\Rightarrow\to)$$

様相論理のシーケント計算 (続)

カット規則

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \ (Cut)$$

$\Lambda \in \{\, \mathbf{K}, \mathbf{KT}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5} \,\}$ のとき：

- $\vdash_{\mathsf{G}(\Lambda)} \Gamma \Rightarrow \Delta \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \Gamma \Rightarrow \Delta$ が $\mathsf{G}(\Lambda)$ で証明可能
- $\vdash_{\mathsf{G}(\Lambda)+} \Gamma \Rightarrow \Delta \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \Gamma \Rightarrow \Delta$ が (Cut) 付 $\mathsf{G}(\Lambda)$ で証明可能

ヒルベルト公理系との対応

(定理) $\Lambda \in \{\,\mathbf{K}, \mathbf{KT}, \mathbf{S4}, \mathbf{S5}\,\}$ のとき：

1. $\vdash_{\mathsf{H}(\Lambda)} \varphi$ ならば $\vdash_{\mathsf{G}(\Lambda)^+} \Rightarrow \varphi$.
2. $\vdash_{\mathsf{G}(\Lambda)^+} \Gamma \Rightarrow \Delta$ ならば $\vdash_{\mathsf{H}(\Lambda)} \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$.
3. それゆえ $\vdash_{\mathsf{H}(\Lambda)} \varphi \iff \vdash_{\mathsf{G}(\Lambda)^+} \Rightarrow \varphi$.

G(S5) is “not enough” for $p \Rightarrow \Box\neg\Box\neg p$

$$\frac{p \Rightarrow \quad \Rightarrow \Box\neg\Box\neg p}{p \Rightarrow \Box\neg\Box\neg p}\,(\Rightarrow w)(w \Rightarrow)$$

$\mathrm{G(S5)}$ + (Cut) is necessary for $p \Rightarrow \Box\neg\Box\neg p$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ p \Rightarrow \neg\Box\neg p\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \neg\Box\neg p \Rightarrow \Box\neg\Box\neg p\end{array}}{p \Rightarrow \Box\neg\Box\neg p}\,(Cut)$$

カット除去定理

(定理) $\Lambda \in \{\, \mathbf{K}, \mathbf{KT}, \mathbf{S4} \,\}$ のとき

$$\vdash_{\mathsf{G}(\Lambda)^+} \Gamma \Rightarrow \Delta \text{ ならば} \vdash_{\mathsf{G}(\Lambda)} \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \mathcal{L}'}{\Gamma \Rightarrow \varphi}}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi}(\Box) \quad \dfrac{\dfrac{\vdots\ \mathcal{R}'}{\varphi, \Pi \Rightarrow \psi}}{\Box\varphi, \Box\Pi \Rightarrow \Box\psi}(\Box)}{\Box\Gamma, \Box\Pi \Rightarrow \Box\psi}(Cut) \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\ \mathcal{L}'}{\Gamma \Rightarrow \varphi} \quad \dfrac{\vdots\ \mathcal{R}'}{\varphi, \Pi \Rightarrow \psi}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \psi}(Cut)}{\Box\Gamma, \Box\Pi \Rightarrow \Box\psi}(\Box)$$

（証明論的）無矛盾性証明

(確認) $\vdash_{\mathsf{H}(\Lambda)} \varphi$ ならば $\vdash_{\mathsf{G}(\Lambda)^+} \Rightarrow \varphi$.

(系) $\Lambda \in \{\, \mathbf{K}, \mathbf{KT}, \mathbf{S4} \,\}$ のとき：

$\nvdash_{\mathsf{G}(\Lambda)^+} \Rightarrow \bot$. それゆえ $\nvdash_{\mathsf{H}(\Lambda)} \bot$.

1. $\vdash_{\mathsf{G}(\mathbf{K})^+} \Rightarrow \bot$ と仮定

$$\dfrac{\dfrac{}{\Rightarrow \bot} \quad \dfrac{}{\bot \Rightarrow}\,(\bot)}{\Rightarrow}\,(Cut)$$

2. $\Rightarrow$ が (Cut) 無で $\mathsf{G}(\mathbf{K})$ で証明可能。矛盾！ (証終)

Van Benthem 特徴付け定理：標準翻訳

$\mathsf{Form}_{\mathcal{FO}} \ni \alpha ::= p(x) \,|\, x = y \,|\, r(x,y) \,|\, \bot \,|\, \alpha \to \alpha \,|\, \forall\, x.\, \alpha \quad (p \in \mathsf{Prop})$

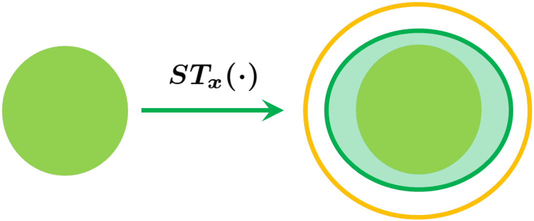
標準翻訳 $ST_x : \mathsf{Form} \to \mathsf{Form}_{\mathcal{FO}}$ (x は $\mathcal{FO}$ の変数):

$$
\begin{array}{lcll}
ST_x(p) & := & p(x) & \\
ST_x(\bot) & := & \bot & \\
ST_x(\varphi \to \psi) & := & ST_x(\varphi) \to ST_x(\psi) & \\
ST_x(\Box\varphi) & := & \forall\, y.\, (r(x,y) \to ST_y(\varphi)) & (y \text{ is fresh}).
\end{array}
$$

Van Benthem 特徴付け定理 (1976)

(定理) $\mathcal{FO}$ の式 $\alpha(x)$ に対し、次の二つは同値：

1. $\alpha(x)$ はある $\varphi \in$ Form に対し $ST_x(\varphi)$ と同値。
2. $\alpha(x)$ は双模倣に対し不変、i.e. 双模倣的な M, w と M', w' に対し: $M \models \alpha(x)[w] \iff M' \models \alpha(x)[w']$,



認識論理 (Epistemic Logic, Hintikka 1962)

エージェントの集合 A の要素 a ごとに $\Box_a$ を準備

論理	$\Box p$	$\Diamond p$
認識論理	$\Box_a p$: a は p を知っている	p は a の知識と矛盾しない

4	$\Box_a p \to \Box_a \Box_a p$	正の内省 (positive introspection)
5	$\neg \Box_a p \to \Box_a \neg \Box_a p$	負の内省 (negative introspection)
T	$\Box_a p \to p$	事実性 (factivity)

- フレーム $(W, (R_a)_{a \in A})$
- しばしば R_a は同値関係

$$M, w \models \Box_a \varphi \iff \text{全ての } v \text{ に対し } (wR_a v \Rightarrow M, v \models \varphi)$$

誕生日パズル

アルベルト (a) とベルナルド (b) はシェリルの誕生日を知りたい。
シェリルは二人に誕生日の候補の 10 個の日付を教えた：

5/15, 5/16, 5/19, 6/17, 6/18, 7/14, 7/16, 8/14, 8/15, 8/17

そして、シェリルはアルベルトに何月か、ベルナルドに何日かを別々にこっそり教えた。

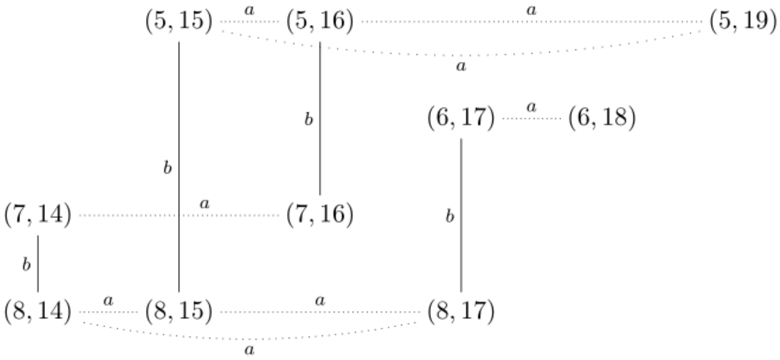
アルベルト： シェリルの誕生日がいつか知らない。
でも、ベルナルドが知らないことは知っている。

ベルナルド： 初めは分からなかったけど、いま分かった。

アルベルト： ボクもシェリルの誕生日がいつか分かったよ。

このときシェリルの誕生日はいつか？

誕生日パズルのモデリング



誕生日パズルの形式化

$\Box_a\varphi$ 「a が φ と知っている」　$\Box_b\varphi$ 「b が φ と知っている」

- Month := $\{5,6,7,8\}$, Day := $\{14,15,16,17,18,19\}$
- 命題変数 m_x 「シェリルの誕生 month が x」
- 命題変数 d_y 「シェリルの誕生 day が y」
- a knows BD := $\bigvee_{y\in\mathsf{Day}}\Box_a d_y$
- b knows BD := $\bigvee_{x\in\mathsf{Month}}\Box_b m_x$

1. アルベルト： φ_{a_1} := $\neg(a$ knows BD$)\wedge\Box_a\neg(b$ knows BD$)$
2. ベルナルド： φ_b := b knows BD
3. アルベルト： φ_{a_2} := a knows BD

公開告知論理 Plaza (1989)

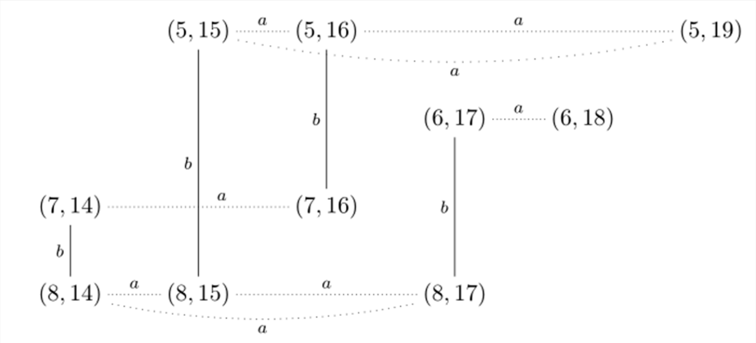
$\langle\varphi\rangle\psi$ 「真な φ の告知後 ψ が成立」

$$M, w \models \langle\varphi\rangle\psi \iff M, w \models \varphi \text{ かつ } M^{\varphi}, w \models \psi.$$

- 但し M^{φ} は M を $\{v \mid M, v \models \varphi\}$ で「削った」モデル
- $\langle\varphi_{a_1}\rangle\langle\varphi_b\rangle\langle\varphi_{a_2}\rangle\top$ が真となる日付を特定！

誕生日パズルの解法 (初期状態)

$\langle \varphi_{a1} \rangle$



$$\varphi_{a_1} := \neg(a \text{ knows BD}) \wedge \Box_a \neg(b \text{ knows BD})$$

誕生日パズルの解法 (告知 φ_{a_1} 後)

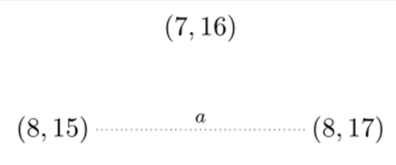
$\langle\varphi_{a1}\rangle\langle\varphi_b\rangle$

$$\begin{tikzcd}
(7,14) \arrow[rr, dash, dotted, "a"] \arrow[d, dash, "b"'] & & (7,16) & \\
(8,14) \arrow[r, dash, dotted, "a"] \arrow[rrr, dash, dotted, bend right, "a"'] & (8,15) \arrow[rr, dash, dotted, "a"] & & (8,17)
\end{tikzcd}$$

$\varphi_b :=$ b knows BD

誕生日パズルの解法 (告知 φ_b 後)

$$\langle \varphi_{a1} \rangle \langle \varphi_{b} \rangle \langle \varphi_{a2} \rangle \top$$



φ_{a_2} := a knows BD

誕生日パズルの解法 (告知 φ_{a2} 後)

$$\langle\varphi_{a1}\rangle\langle\varphi_{b}\rangle\langle\varphi_{a2}\rangle\top$$

$(7, 16)$

φ_{a_2} := a knows BD

時間論理・時制論理 (Prior 1957, 1967, 1968)

論理	$\Box p$	$\Diamond p$
時制論理 (未来)	$[F]p$:どの未来でも p	$\langle F\rangle p$: p だろう
時制論理 (過去)	$[P]p$:どの過去でも p	$\langle P\rangle p$: p だった

$$M,t \models [F]\varphi \iff \text{全ての時点 } t' \text{ に対し } tRt' \Rightarrow M,t' \models \varphi,$$
$$M,t \models [P]\varphi \iff \text{全ての時点 } t' \text{ に対し } t'Rt \Rightarrow M,t' \models \varphi.$$

- tRt' : 「t は t' より前の時点」「t' は t より後の時点」
- 次は成り立つか？

$$p \to [F]\langle P\rangle p, \qquad p \to [P]\langle F\rangle p$$

- $\langle F\rangle\langle F\rangle p \to \langle F\rangle p$, $\langle P\rangle\langle P\rangle p \to \langle P\rangle p$:
  いずれも R の推移性を定義

命題動的論理 (PDL)

$[\pi]\varphi$ 「プログラム π を実行した後に必ず φ が成立」

- 合成 $\pi;\pi'$ 「π を実行し、その後 π' を実行せよ」
- 選択 $\pi \cup \pi'$
  「π か π' を選択し、選択したプログラムを実行せよ」
- 繰り返し π^*
  「π を非決定的に選ばれた回数、繰り返し実行せよ」
- 命題のテスト $\varphi?$ 「φ をテストし真なら次へ進め」

$$\text{if } \varphi \text{ then } \pi \text{ else } \pi' \quad := \quad (\varphi?;\pi) \cup ((\neg\varphi)?;\pi')$$

$$M,w \models [\pi]\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \text{全ての } v \text{ に対し } (wR_\pi v \Rightarrow M,v \models \varphi)$$

C. I. Lewis & Langford (1932)

「厳密含意」$\varphi \strictif \psi := \neg\Diamond(\varphi \wedge \neg\psi)$

S1 の公理

$$
\begin{array}{ll}
(p \wedge q) \strictif (q \wedge p) & (p \wedge q) \strictif p \\
p \strictif (p \wedge p) & ((p \wedge q) \wedge r) \strictif (p \wedge (q \wedge r)) \\
((p \strictif q) \wedge (q \strictif r)) \strictif (p \strictif r) & (p \wedge (p \strictif q)) \strictif q
\end{array}
$$

S1 の推論規則

- 一様代入則
- 厳密同値 $(\varphi \strictif \psi) \wedge (\psi \strictif \varphi)$ の置換
- φ, ψ から $\varphi \wedge \psi$ を導く
- $\varphi \strictif \psi$ と φ から ψ を導く

C. I. Lewis & Langford (1932), Becker (1930)

S4, S5 は Becker (1930) 由来：

- **S4** := S1 + $\Diamond\Diamond p \mathrel{-\!\!3} \Diamond p$
- **S5** := S1 + $\Diamond p \mathrel{-\!\!3} \neg\Diamond\neg\Diamond p$
- “Brouwersche axiom”: $p \mathrel{-\!\!3} \neg\Diamond\neg\Diamond p$

> しかし、この問題を形式的な設定で扱うためにここでとられた道筋が成功に至るかどうかは疑わしく思われる。
> (Gödel 1931)

Gödel (1933) の体系 $\mathfrak{S}$

$B\varphi$ “provable by any correct means” (Troelstra 1986)

体系 $\mathfrak{S}$

- 命題論理の公理と推論規則
- $Bp \to p$, $\quad Bp \to (B(p \to q) \to Bq)$, $\quad Bp \to BBp$.
- 規則「φ から $B\varphi$ を導いてもよい」

$$\mathrm{S4}\text{ で証明可能} \iff \mathfrak{S}\text{ で証明可能}$$

- 直観主義論理式から様相論理式への二つの翻訳:
  Gödel-Mckinsey-Tarski 翻訳の原型
- 「翻訳が証明可能性を保つ」逆の成立も予想

Kuratowski (1922), Mckinsey & Tarski (1944, 1948)

Kuratowski (1922): 集合 S 上の閉包演算 $(\cdot)^a \subseteq S$:

$$\varnothing^a = \varnothing, \quad (X \cup Y)^a = X^a \cup Y^a, \quad X \subseteq X^a, \quad X^a = X^{aa}$$

- X が閉 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $X^a = X$
- X が開 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $S \setminus X$ が閉

Mckinsey & Tarski (1944) の 閉包代数: ブール代数 $+$ $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}0 = 0, \quad \mathbf{C}(x \vee y) = \mathbf{C}x \vee \mathbf{C}y, \quad x \leq \mathbf{C}x, \quad \mathbf{C}x = \mathbf{CC}x$$

Mckinsey & Tarski (1948):
代数的手法でゲーデルの予想を解決・新翻訳も提案

Jónsson & Tarski (1952)

閉包代数の発想を n-引数へより一般化 (以下 1 引数で)

演算子付ブール代数 (BAO) ： ブール代数 + 写像 f

- f が演算子 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ f は $\vee$ を保つ： $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.
- 演算子 f が 正規 $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $f(0) = 0$
- 関係構造 (S, R) の complex 代数 とは $(\wp(S), f_R)$ で

$$x \in f_R(X) \quad \overset{\text{def.}}{\iff} \quad \text{ある } y \in S \text{ に対し } (xRy \text{ かつ } y \in X)$$

> (定理) 正規演算子をもつどんな BAO も関係構造の complex 代数の部分代数に同型

- R の性質と f_R がみたす等式の関係も研究

Meredith (1956) & Prior (1962)

Meredith のプロパティ計算 (L: 必然性, M : 可能性)

$$
\begin{array}{lcl}
(p \to q)a & = & (pa) \to (qa) \\
(Lp)a & = & \forall b(Uab \to pb) \\
(Mp)a & = & (\neg L \neg p)a = \exists b(Uab \wedge pb)
\end{array}
$$

- U に追加条件を課すと異なる様相論理を得る

Prior (1962, p.36) の U の解釈: P. T. Geach の影響

> 「可能」な事態ないし世界を我々が実際居る世界から到達できるものだと定義するとせよ。[...]『世界ジャンプ』について異なる仮定をおくことで、異なる様相体系、異なるヴァージョンの必然性と可能性の論理、を得る [...]

Hintikka (1961) の意味論

- 論理式集合 μ が**モデル集合** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$
  μ は命題論理部分に関し「飽和」
- (Ω, R) が**モデル系** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ Ω はモデル集合の集合で
  代替関係 $R \subseteq \Omega \times \Omega$ は次をみたす:
  - $\Diamond\varphi \in \mu \in \Omega$ なら、$\varphi \in \nu$ となる μ の代替 $\nu \in \Omega$ が存在
  - $\Box\varphi \in \mu \in \Omega$ で $\nu \in \Omega$ が μ の代替ならば $\varphi \in \nu$.
  - $\Box\varphi \in \mu \in \Omega$ ならば $\varphi \in \mu$.
- 論理式集合が**「充足可能」** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$
  その集合をふくむモデル集合をもつモデル系が存在
- φ が**「妥当」** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\{\neg\varphi\}$ が充足可能でない

φ が KT で証明可能 $\Longleftrightarrow$ φ が「妥当」

Kripke (1958, 1963)

Kripke 1958: 量化 S5 の完全性

- 1956 年の高校生時にスタート
- ドメインは点集合ではない・到達可能性なし
- E. W .Beth による意味論タブローの方法

Kripke 1963: 可能世界意味論と KT, S4, S5 の完全性証明

正規モデル構造 (n.m.s) とは順序対 (G, K, R) である、ただし K は非空集合、$G \in K$, そして R は K 上で定義される反射的関係である。[...] 式 A が世界 H_1 で必然的と評価するのは、H_1 に相対的に可能などの世界においても真となる場合である (pp. 68-70)

Jónsson & Tarski (1952) vs. Kripke (1963)

現在の理論の、もっとも驚くべき先取りの研究は、この論文がほとんど完成したときに見出されたのだが、ヨンソンとタルスキ [17] の代数的類似の研究である

(Kripke 1963)

- Copeland (1996, 2002) の Kripke との p.c.:

When I presented my paper at the conference in Finland in 1962, I emphasised the importance of this paper. Tarski was present, and said that he was unable to see any connection with what I was doing!

松本和夫の「一冊の雑誌」と訳語「様相論理」

1938 (昭和 13 年)

寺阪英孝「Boole 代数の位相的表現」『位相数学』1 号：

> X, Y 等が点集合の時、和集合を $X+Y$, [...] X の閉包を X^a [...] 若し X^a のことを “X is possible” の意味に解釈すれば、Lewis の論理学になるかのごとく思はれる。

1949 (昭和 24 年)

伊藤誠「科学的論理学の展望」『基礎科学』3(3), p.299

> 上に述べた多値論理学や、直観主義の論理学の他に、猶 “様相論理学”(Modal Logic) がある

松本和夫の「一冊の雑誌」と訳語「様相論理」(続)

1948 (昭和 23 年) 黒田成勝

「Aristotle の論理と Brouwer の論理について」『科学』岩波書店

> また筆者は最近高木先生からの御注意によって、WEYL: The ghost of modality なる論文があることを知った。これは 1940 年代頃に哲学関係の雑誌に掲載されたもののようで、この論文の中で、アメリカの哲学者 C.I. Lewis によって導入せられ、ドイツの哲学者 Oskar Becker によって現象学的に論ぜられた Lewis の modality が取り扱われている。[...] Lewis の法は possibility, necessity 等の法を記号論理学的に取り扱つたものである。

伊藤誠

- S5 と単項述語論理の関係を研究 (1949, 1955)
- 昭和 3 年 京大数学科卒
- 昭和 13 年–29 年 3 月
  広島高等工業学校、広島工業専門学校、広島大学工学部 教授

> 本書の原稿は、訳者が広島で原爆の洗礼を受けて臥床中に筆を取ったもので、訳者にとっては原爆記念となるものである。

伊藤誠 (1954) 訳 ヒルベルト・アッケルマン『記号論理学の基礎』