

様相論理入門 第2回

佐野 勝彦

北陸先端科学技術大学院大学

情報科学研究科

v-sano@jaist.ac.jp

2015 年 8 月 19 日（水）

本日の講義内容

- 濾過法による有限フレーム性と決定可能性
- 双模倣・生成部分モデル・ p -モルフィズム
- S4.2 と GL の有限フレーム性

推移的閉包

$R, R' \subseteq W \times W$.

- ▶ **合成**: $R \circ R' := \{ (w, v) \mid \text{ある } u \text{ に対し } wRu \ \& \ uRv \}$
- ▶ R^n ($n \in \omega$) を帰納的に定義: $R^0 = \{ (w, w) \mid w \in W \}$,

$$\begin{aligned} R^1 &:= R \\ R^{n+1} &:= R^n \circ R \end{aligned}$$

- ▶ R の推移的閉包 R^+ , 反射推移的閉包 R^* は

$$R^+ := \bigcup_{n \geq 1} R^n, \quad R^* := \bigcup_{n \geq 0} R^n$$

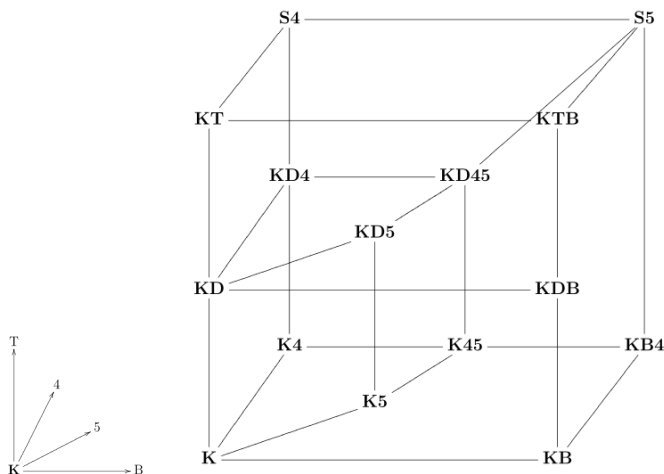
と定める。

決定可能性

正規様相論理 Λ が**決定可能** $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

ある実効的手続き P が存在し : φ を P に入力すると $\varphi \in \Lambda$ のとき 1 を出力し、 $\varphi \notin \Lambda$ のとき 0 を出力する。

T, B, 4, 5, D から定まる正規様相論理



from <http://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/>

有限フレーム性

Λ : 正規様相論理, $\mathbb{F}$: 有限フレームからなるクラス

- ▶ Λ が $\mathbb{F}$ に対し有限フレーム性 (FFP) をもつ

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ 任意の式 φ に対し: $\mathbb{F} \models \varphi \iff \varphi \in \Lambda$.

- ▶ Λ が有限フレーム性 (FFP) をもつ

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ ある有限フレームクラスに対し Λ が FFP をもつ

ハロップ (Harrop) の定理

ある有限フレームクラス $\mathbb{F}$ に対し:

$\mathbb{F} \models \Sigma$ かつ 任意の式 φ に対し: $\not\models_{H(K\Sigma)} \varphi \Rightarrow \mathbb{F} \not\models \varphi$.

(定理) **有限**の $\Sigma \subseteq \text{Form}$ に対し

$K\Sigma$ が FFP をもつなら $K\Sigma$ は決定可能。

($\therefore$) $H(K\Sigma)$ の定理を枚挙する実効的手続き P が存在

- ▶ **入力 φ に対し Σ を妥当にするある有限フレーム F で $F \not\models \varphi$ かをテストする手続き Q を構成:**
 - 全有限フレームを (同型除き) 枚挙する手続き Q_1
 - ある有限フレームで ψ が妥当かをテストする手続き Q_2

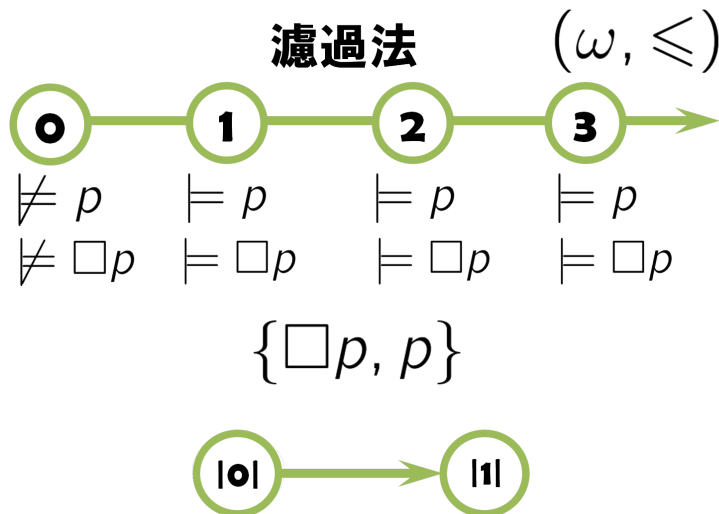
$F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, \dots$

入力 φ に対し P と Q を並列実行すればよい。 (証終)

Lemmon Note (1977)

E. J. Lemmon 1930-1966

Dana Scott 1932-



部分論理式集合

φ の部分論理式全体の集合 $\text{Sub}(\varphi)$ を以下のように定義：

$$\text{Sub}(p) \quad := \quad \{p\}$$

$$\text{Sub}(\perp) \quad := \quad \{\perp\}$$

$$\text{Sub}(\varphi \rightarrow \psi) \quad := \quad \text{Sub}(\varphi) \cup \text{Sub}(\psi) \cup \{\varphi \rightarrow \psi\}$$

$$\text{Sub}(\Box\varphi) \quad := \quad \text{Sub}(\varphi) \cup \{\Box\varphi\}$$

- ▶ Σ が**部分論理式に閉じる** $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \varphi \in \Sigma$ なら $\text{Sub}(\varphi) \subseteq \Sigma$.
- ▶ $\text{Sub}(\varphi)$ は部分論理式に閉じる

濾過法 (filtration)

$M = (W, R, V)$: モデル, $\Sigma \subseteq \text{Form}$: 部分論理式に閉じる

- ▶ W 上の同値関係 $w \sim_{\Sigma} v \stackrel{\text{def.}}{\iff}$:

全ての $\varphi \in \Sigma$ に対し $(M, w \models \varphi \iff M, v \models \varphi)$

- ▶ w の $\sim_{\Sigma}$ による同値類 $|w| := \{v \in W \mid w \sim_{\Sigma} v\}$.
 ▶ $W_{\Sigma} := \{|w| \mid w \in W\}$

(命題) Σ が有限のとき $\#W_{\Sigma} \leq 2^{\#\Sigma}$.

濾過法 (filtration) (続)

M の Σ による濾過 $M_\Sigma^f := (W_\Sigma, R^f, V_\Sigma)$ は次をみたす :

▶ $W_\Sigma := \{ |w| \mid w \in W \}$.

(i) wRv ならば $|w|R^f|v|$.

(ii) $|w|R^f|v|$ ならば

全ての $\Box\varphi \in \Sigma$ に対し $(M, w \models \Box\varphi \Rightarrow M, v \models \varphi)$.

▶ $V_\Sigma(p) := \{ |w| \mid w \in V(p) \} \ (p \in \Sigma)$.

濾過定理

$M = (W, R, V)$: モデル, $\Sigma \subseteq \text{Form}$: 部分論理式に閉じる

(定理) 任意の $\varphi \in \Sigma, w \in W$ に対し :

$$M, w \models \varphi \iff M_{\Sigma}^f, |w| \models \varphi.$$

濾過の例

W_Σ 上の関係 R^s と R^l をそれぞれ :

- ▶ $|w|R^s|v| \stackrel{\text{def.}}{\iff}$
ある $w' \in |w|$ とある $v' \in |v|$ が存在して $w'Rv'$.
- ▶ $|w|R^l|v| \stackrel{\text{def.}}{\iff}$
任意の $\Box\varphi \in \Sigma$ に対し $(M, w \models \Box\varphi \Rightarrow M, v \models \varphi)$.

(命題) R^s, R^l はともに条件 (i), (ii) をみたす

(命題) $M_\Sigma^f = (W_\Sigma, R^f, V_\Sigma)$ に対し : $R^s \subseteq R^f \subseteq R^l$.

K の有限フレーム性・決定可能性

ある有限フレームクラス $\mathbb{F}$ に対し:

$\mathbb{F} \models K$ かつ 任意の式 φ に対し: $\varphi \notin K \Rightarrow \mathbb{F} \not\models \varphi$.

(定理) K は全有限フレームクラスに対し FFP をもつ

($\therefore$)

1. 健全性は ok
2. $\varphi \notin K$ と仮定。強完全性より:
3. ある (M, w) に対し $M, w \not\models \varphi$.
4. 濾過定理より $M_{\text{Sub}(\varphi)}^s, |w| \not\models \varphi$.

(証終)

反射性・継起性・対称性を保つ濾過法

$M = (W, R, V)$: モデル, $\Sigma \subseteq \text{Form}$: 部分論理式に閉じる

(命題) M の Σ による濾過 $M_{\Sigma}^f = (W_{\Sigma}, R^f, V_{\Sigma})$ に対し :

1. R が反射的なら R^f も反射的
2. R が継起的なら R^f も継起的
3. R が対称的なら R^s も対称的

推移性と保つ濾過法

$M = (W, R, V)$: モデル, $\Sigma \subseteq \text{Form}$: 部分論理式に閉じる

- ▶ 最小の濾過関係 R^s の推移的閉包を R^{s+} とする。

(命題) R が推移的とする。このとき :

1. $M_{\Sigma}^{s+} = (W_{\Sigma}, R^{s+}, V_{\Sigma})$ は M の Σ による濾過
2. R が対称的なら R^{s+} も対称的

正規様相論理の有限フレーム性

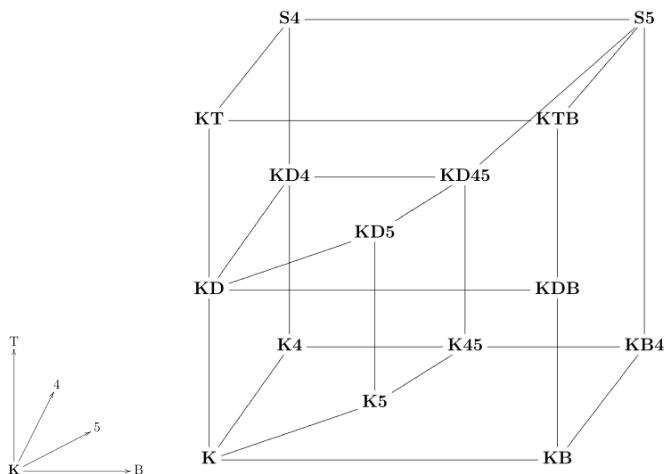
(定理) 全ての $\Delta \subseteq \{T, B, 4, D\}$ に対し
 $K\Delta$ は FFP をもち、それゆえ決定可能。

($\therefore$)

1. K の場合とほぼ同様。ただし :
2. $4 \notin \Delta$ のとき R^s を使え
3. $4 \in \Delta$ のとき R^{s+} を使え

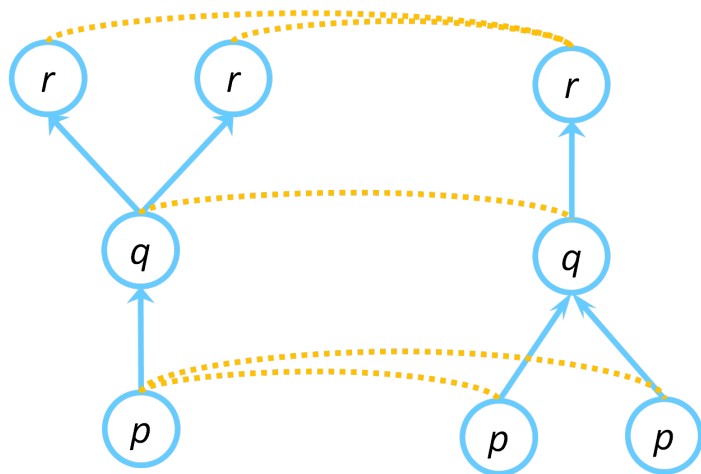
(証終)

T, B, 4, 5, D から定まる正規様相論理



from <http://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/>

双模倣 (bisimulation)



双模倣 (bisimulation)

$M = (W, R, V)$, $M' = (W', R', V')$: モデル

- ▶ $Z \subseteq W \times W'$ が M と M' の間の **双模倣** $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$
 (Atom) wZw' ならば、全 $p \in \text{Prop}$ に対し :

$$w \in V(p) \iff w' \in V'(p).$$

(Forth) wZw' かつ wRv なら
 ある $v' \in W'$ が存在し (vZv' かつ $w'R'v'$).

(Back) wZw' かつ $w'R'v'$ なら
 ある $v \in W$ が存在し (vZv' かつ wRv).

- ▶ $(M, w) \rightleftharpoons (M', w')$ 「**双模倣的**」 $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$
 M と M' の間の双模倣 Z が存在し wZw' .

双模倣ならば様相同値

- ▶ $(M, w) \rightsquigarrow (M', w')$ 「様相同値」 $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$
 全ての $\varphi \in \text{Form}$ に対し $(M, w \models \varphi \iff M', w' \models \varphi)$.

(命題) $Z \subseteq W \times W'$ が M と M' の間の双模倣ならば、
 任意の式 φ に対し：

$$wZw' \implies (M, w \models \varphi \iff M', w' \models \varphi).$$

それゆえ $(M, w) \rightleftharpoons (M', w')$ ならば $(M, w) \rightsquigarrow (M', w')$.

生成部分モデル

$M = (W, R, V)$, $M' = (W', R', V')$: モデル

▶ M' が M の生成部分モデル $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

(部分) $W' \subseteq W$ かつ $R' = R \cap (W' \times W')$

(生成) 全ての $w \in W'$ と $v \in W$ に対し

wRv なら $v \in W'$.

(Atom) $V'(p) = V(p) \cap W'$ ($p \in \text{Prop}$).

▶ $w \in W$ のとき $M_w := w$ を含む最小の生成部分モデル

▶ M は点生成されている $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

ある $w \in W$ に対し $M = M_w$.

(命題) M' が M の生成部分モデルのとき

$(M', w') \Leftrightarrow (M, w') \ (w' \in W')$.

p -モルフィズム

$M = (W, R, V)$, $M' = (W', R', V')$: モデル

- ▶ $f : W \rightarrow W'$ が M から M' への p -モルフィズム
 $\xLeftrightarrow{\text{def.}} Gr(f) := \{ (w, f(w)) \mid w \in W \}$ が双模倣.

(命題) f が M から M' への p -モルフィズムならば
 $(M, w) \simeq (M', f(w)).$

木展開

$M = (W, R, V)$ が w で点生成されているとする。

M の w に関する**木展開**は $\text{Tree}(M, w) = (\vec{W}, \vec{R}, \vec{V})$:

- ▶ $\vec{W} := \{ (w, w_1, \dots, w_n) \mid wRw_1 \& \dots \& w_{n-1}Rw_n \}$.
- ▶ $(w, w_1, \dots, w_n) \vec{R}(w, v_1, \dots, v_m) \xLeftrightarrow{\text{def.}}$
 $m = n + 1$ かつ $w_i = v_i \ (1 \leq i \leq n)$
- ▶ $(w, w_1, \dots, w_n) \in \vec{V}(p) \xLeftrightarrow{\text{def.}} w_n \in V(p)$.

M の w に関する**推移木展開**は $\text{Tree}^+(M, w) = (\vec{W}, \vec{R}^+, \vec{V})$.

- ▶ $\vec{R}^+$ は $\vec{R}$ の推移的閉包

木展開 (続)

(命題) $f : \vec{W} \rightarrow W$ を $f(w, w_1, \dots, w_n) := w_n$ で定める。

1. f は $\text{Tree}(M, w)$ から M への全射 p -モルフィズム
2. (W, R) が推移的ならば
 f は $\text{Tree}^+(M, w)$ から M への全射 p -モルフィズム

前順序・反対称性・半順序

$F = (W, R)$: フレーム

- ▶ F が**前順序** $\stackrel{\text{def.}}{\iff} F$ が反射的かつ推移的
- ▶ F が**反対称的** $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$
任意の $w, v \in W$ に対し $((wRv \text{ かつ } vRw) \Rightarrow w = v)$.
- ▶ F が**半順序** $\stackrel{\text{def.}}{\iff} F$ が前順序かつ反対称的

スケルトン

- ▶ 前順序 (W, R) のスケルトンとは W 上の同値関係 $\approx$:

$$w \approx v \stackrel{\text{def.}}{\iff} wRv \text{ かつ } vRw$$

による (W, R) の商構造 $(W_{\approx}, R_{\approx})$ (半順序に！)

- ▶ (W, R) が束 $\stackrel{\text{def.}}{\iff} (W, R)$ が半順序、かつ、 W の任意の二元 $\{w, v\}$ が最小上界と最大下界をもつ
- ▶ (W, R) が前束 $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$
 (W, R) が前順序、かつ、そのスケルトンが束

S4.2 の有限フレーム性

(命題) 有限の有向前順序のクラスに対し S4.2 は FFP をもつ

($\because$)

1. $\varphi \notin \text{S4.2}$. 強完全性より :
2. ある有向前順序モデル M のある w で $M, w \not\models \varphi$.
3. M の w による生成モデルで $M_w, w \not\models \varphi$.
4. $(M_w)_{\text{Sub}(\varphi)}^{s+}, |w| \not\models \varphi$.
5. $(M_w)_{\text{Sub}(\varphi)}^{s+}$ は有限・前順序モデル・有向的 (証終)

(命題) 有限前束のクラスに対し S4.2 は FFP をもつ

有限フレーム内で **L** は非反射性かつ推移性を定義

- ▶ F が**非反射的** $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ 任意の w に対し (wRw でない).

(命題) 有限フレーム $F = (W, R)$ に対し

$$F \models \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p \iff R \text{ が推移的\&非反射的}$$

(命題) $\Box p \rightarrow \Box\Box p \in \mathbf{GL}$.

GL-カノニカルモデルの濾過

$\Lambda := \mathbf{GL}$, $\Sigma := \text{Sub}(\varphi)$ とおく。

Λ -カノニカルモデル $M^\Lambda = (W^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$ に対し W^Λ の $\sim_\Sigma$ による商集合 W_Σ^Λ 上に関係 R^g を次のように定義：

$$|\Gamma| R^g |\Delta| \stackrel{\text{def.}}{\iff}$$

- $$\begin{cases} 1) \text{ 全ての } \Box\psi \in \Sigma \text{ に対し } (\Box\psi \in \Gamma \Rightarrow \psi \wedge \Box\psi \in \Delta), \text{ かつ} \\ 2) \text{ ある } \Box\gamma \in \Sigma \text{ に対し } (\Box\gamma \notin \Gamma \ \& \ \Box\gamma \in \Delta). \end{cases}$$

このとき $(M_\Sigma^\Lambda)^g = (W_\Sigma^\Lambda, R^g, V_\Sigma^\Lambda)$ とおく。

(補題) R^g は推移的かつ非反射的、 $(M_\Sigma^\Lambda)^g$ は有限。

GL-カノニカルモデルの濾過 (続)

$\Lambda := \mathbf{GL}$, $\Sigma := \text{Sub}(\varphi)$ とおく。

(補題) 任意の $\psi \in \Sigma$, 任意の極大 Λ -無矛盾な Γ に対し:

$$(M_{\Sigma}^{\Lambda})^g, |\Gamma| \models \psi \iff \psi \in \Gamma.$$

GL の有限フレーム性

(定理) GL は非反射的かつ推移的な有限フレームからなるクラスに対し FFP をもつ、ゆえに決定可能。

$\therefore \Lambda := \text{GL}$ とおく。

1. φ が Λ -無矛盾とする。
2. リンデンバウム補題より Λ -MCS $\Gamma \ni \varphi$ が存在
3. $\Sigma := \text{Sub}(\varphi)$ に対し $(M_{\Sigma}^{\Lambda})^g, |\Gamma| \models \varphi$.
4. $(M_{\Sigma}^{\Lambda})^g$ は有限・非反射的・推移的 (証終)

GL の有限フレーム性 (続)

(定理) GL は有限推移木のクラスに対し FFP をもつ。

$\therefore \Lambda := \text{GL}$ とおく。

1. φ が Λ -無矛盾とする。前定理より：
2. ある非反射 & 推移的有限モデル M のある w で $M, w \models \varphi$.
3. w による生成部分モデルで $M_w, w \models \varphi$.
4. 推移木展開をとって $\text{Tree}^+(M_w, w), w \models \varphi$.
5. $\text{Tree}^+(M_w, w)$ は非反射的なので有限。

(証終)