

様相論理入門 第1回

佐野 勝彦

北陸先端科学技術大学院大学

情報科学研究科

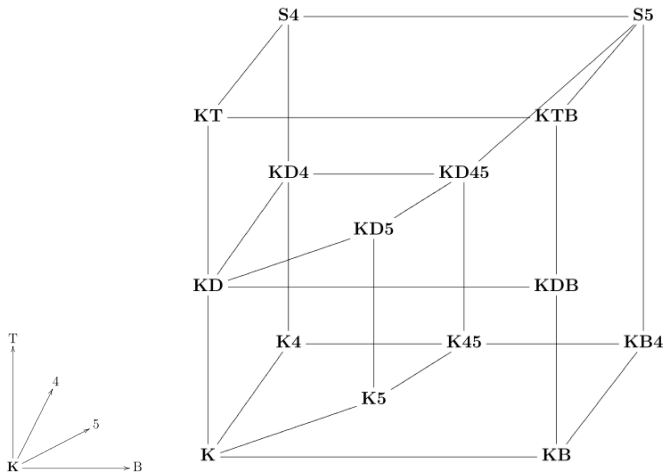
v-sano@jaist.ac.jp

2015 年 8 月 18 日 (火)

本日の講義内容

- 構文論・意味論・フレーム定義可能性
- 正規様相論理
- 正規様相論理の強完全性証明

T, B, 4, 5, D から定まる正規様相論理



from <http://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/>

様相論理の言語

命題変数の可算集合 **Prop** から論理式的全集合を定義：

$$\mathbf{Form} \ni \varphi ::= p \mid \perp \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid \Box \varphi \quad (p \in \mathbf{Prop})$$

Γ, Δ, Σ など： 論理式の集合

$$\begin{aligned} \top &:= \perp \rightarrow \perp, & \varphi \vee \psi &:= (\neg \varphi) \rightarrow \psi, \\ \neg \varphi &:= \varphi \rightarrow \perp, & \varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \rightarrow \neg \psi), \\ \Diamond \varphi &:= \neg \Box \neg \varphi, & \varphi \leftrightarrow \psi &:= (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi). \end{aligned}$$

クリプキフレーム

(クリプキ) フレームはペア $F := (W, R)$ で :

- ▶ $W \neq \emptyset$ (世界・状況の集合)
- ▶ $R \subseteq W \times W$ (到達可能性・遷移関係)

フレームクラス (R の性質)	
反射性	$\forall w (wRw)$
対称性	$\forall w, v (wRv \Rightarrow vRw)$
推移性	$\forall w, v, u ((wRv \text{ かつ } vRu) \Rightarrow wRu)$
ユークリッド性	$\forall w, v, u ((wRv \text{ かつ } wRu) \Rightarrow vRu)$
継起性	$\forall w \exists v (wRv)$

- ▶ R が同値関係 $\stackrel{\text{def.}}{\iff} R$ が反射・推移・対称的
- ▶ フレームのクラスは $\mathbb{F}, \mathbb{G}$ などで表す

クリプキモデル

(クリプキ) モデルはペア $M := (F, V)$ で :

- ▶ $F = (W, R)$ はフレーム
- ▶ $V : \text{Prop} \rightarrow \wp(W)$ は付値関数 ($\wp(W)$ は W の冪集合)

$V(p) \subseteq W$: 「 p が成立する世界の集合」

クリプキ意味論

充足関係 $M, w \models \varphi$ 「 φ は M の w で真（成立）」:

$$M, w \models p \iff w \in V(p),$$

$$M, w \not\models \perp,$$

$$M, w \models \varphi \rightarrow \psi \iff M, w \not\models \varphi \text{ あるいは } M, w \models \psi$$

$$M, w \models \Box\varphi \iff \text{任意の } v \text{ に対し } (wRv \text{ ならば } M, v \models \varphi).$$

定義記号:

$$M, w \models \neg\varphi \iff M, w \not\models \varphi,$$

$$M, w \models \varphi \wedge \psi \iff M, w \models \varphi \text{ かつ } M, w \models \psi,$$

$$M, w \models \Diamond\varphi \iff \text{ある } v \text{ に対し } (wRv \text{ かつ } M, v \models \varphi).$$

妥当性

F : フレーム, M : モデル, $\mathbb{F}$: フレームクラス

- ▶ $M, w \models \Gamma \stackrel{\text{def.}}{\iff}$ 全ての $\varphi \in \Gamma$ に対し $M, w \models \varphi$.
- ▶ $M \models \Gamma$ 「 Γ が M で妥当」
 $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ 全ての w に対し $M, w \models \Gamma$.
- ▶ $F \models \Gamma$ 「 Γ が F で妥当」
 $\stackrel{\text{def.}}{\iff} F$ 上の全ての付値 V に対し $(F, V) \models \Gamma$.
- ▶ $\mathbb{F} \models \Gamma$ 「 Γ が $\mathbb{F}$ で妥当」
 $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ 全てのフレーム $F \in \mathbb{F}$ に対し $F \models \Gamma$.

(命題) 任意のフレーム F で

$$F \models \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q).$$

フレーム定義可能性とその例

 $\mathbb{F}$: フレームクラス

- ▶ Γ が $\mathbb{F}$ を定義 $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ 任意のフレーム F に対し:

$$F \models \Gamma \iff F \in \mathbb{F}$$

論理式	フレームクラス (R の性質)
T $\Box p \rightarrow p$	R の反射性
B $p \rightarrow \Box \Diamond p$	R の対称性
4 $\Box p \rightarrow \Box \Box p$	R の推移性
5 $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$ or $\neg \Box p \rightarrow \Box \neg \Box p$	R のユークリッド性
D $\Box p \rightarrow \Diamond p$ or $\neg \Box \perp$	R の継起性

フレーム定義可能性とその例 (続)

論理式	フレームクラス (フレームの性質)
.2 $\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$	R の有向性
L $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$	R は推移的 & R -無限上昇列がない

▶ R の有向性 :

$$\forall w, v, u ((wRv \text{ かつ } wRu) \Rightarrow \exists s (vRs \text{ かつ } uRs)).$$

▶ F が R -無限上昇列をもつ $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

$x_n R x_{n+1} \ (n \in \omega)$ となる列 $(w_n)_{n \in \omega}$ が存在.

ヒルベルト式公理系 $H(K)$

公理

Taut 命題トートロジー

$$K \quad \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

推論規則

MP φ と $\varphi \rightarrow \psi$ から ψ を導く一様代入則 (US) φ からその一様代入例を導く必然化則 (Nec) φ から $\Box\varphi$ を導く

- ▶ ψ が $H(K)$ の定理 ($\vdash_{H(K)} \psi$ と表記) $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$
 式のリスト $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ が存在し: φ_i は公理か、それ以前
 の式から推論規則で導かれており ($i > 1$), $\varphi_n = \psi$.

例: $H(K)$ の体系内定理

- | | | |
|----|---|----------|
| 1. | $(p \wedge q) \rightarrow p$ | Taut |
| 2. | $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ | 1, 一様代入則 |
| 3. | $\Box((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi)$ | 2, 必然化則 |
| 4. | $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ | K |
| 5. | $\Box(\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\varphi)$ | 4, 一様代入則 |
| 6. | $\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\varphi$ | 3, 5, MP |

同様に $\vdash_{H(K)} \Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box\psi$. よって

$$\vdash_{H(K)} \Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$$

正規様相論理

$\Lambda \subseteq \text{Form}$ が正規様相論理 $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

Λ は $H(K)$ の全公理を含み、 $H(K)$ の全推論規則に閉じる

$K\Sigma := \Sigma$ を含む最小の正規様相論理

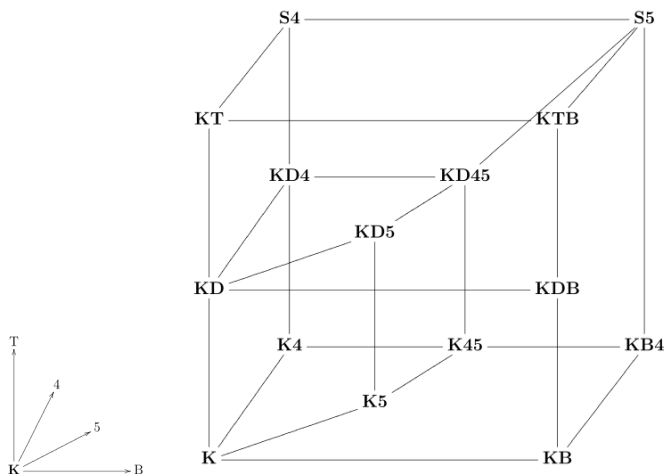
- ▶ $H(K\Sigma)$: $H(K)$ に追加公理群 Σ を加えた系
- ▶ $H(K\Sigma)$ の体系内定理の全集合と $K\Sigma$ は一致。
- ▶ Λ が正規様相論理のとき: $\varphi \in \Lambda$ を $\vdash_{\Lambda} \varphi$ とも書く。
- ▶ どの正規様相論理 Λ に対しても:

$$\vdash_{\Lambda} \Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi).$$

「有名」な正規様相論理

K	:=	最小の正規様相論理
S4	:=	$K\{T, 4\}$
S5	:=	$K\{T, 4, B\}$
S4.2	:=	$K\{T, 4, .2\}$
GL	:=	$K\{L\}$

T, B, 4, 5, D から定まる正規様相論理



from <http://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/>

正規様相論理の健全性

正規様相論理 Λ がフレームクラス $\mathbb{F}$ に対し **健全**

$\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ 任意の φ に対し $\varphi \in \Lambda$ ならば $\mathbb{F} \models \varphi$, i.e. $\mathbb{F} \models \Lambda$.

(定理) 任意の $\Sigma \subseteq \{T, B, 4, 5, D, .2\}$ に対し $K\Sigma$ は Σ が定義するフレームクラス $\mathbb{F}_\Sigma$ に対して健全。

正規様相論理の健全性

(系) 任意の $\Sigma \subseteq \{T, B, 4, 5, D, .2\}$ に対し $\perp \notin K\Sigma$.

($\because$) $\mathbb{F}_\Sigma$: Σ が定義するフレームクラス

$$\perp \in K\Sigma \implies \mathbb{F}_\Sigma \models \perp$$

導出・帰結・（強・弱）完全性

Λ : 正規様相論理, $\mathbb{F}$: フレームクラス

- ▶ Λ が $\mathbb{F}$ に対し **弱完全** $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$
 任意の φ に対し $\mathbb{F} \models \varphi$ ならば $\varphi \in \Lambda$.
- ▶ **導出関係** $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi \stackrel{\text{def.}}{\iff}$
 ある有限集合 $\Delta \subseteq \Gamma$ に対し $\bigwedge \Delta \rightarrow \varphi \in \Lambda$ ($\bigwedge \emptyset := \top$).
- ▶ **帰結関係** $\Gamma \models_{\mathbb{F}} \varphi \stackrel{\text{def.}}{\iff}$
 任意の $F \in \mathbb{F}$, 任意の F 上の付値 V , 任意の w に対し:
 $(F, V), w \models \Gamma$ ならば $(F, V), w \models \varphi$.
- ▶ Λ が $\mathbb{F}$ に対し **強完全** $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$
 任意の $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$ に対し: $\Gamma \models_{\mathbb{F}} \varphi$ ならば $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$

無矛盾・充足可能

Λ : 正規様相論理, $\mathbb{F}$: フレームクラス, F : フレーム

- ▶ Γ が **Λ -矛盾** $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \Gamma \vdash_{\Lambda} \perp$.
- ▶ Γ が **Λ -無矛盾** $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \Gamma$ が Λ -矛盾でない, i.e. $\Gamma \not\vdash_{\Lambda} \perp$
- ▶ Γ が F で **充足可能** $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$
 F 上のある付値 V とある w に対し $(F, V), w \models \Gamma$.
- ▶ Γ が $\mathbb{F}$ で **充足可能** $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$
 ある $F \in \mathbb{F}$ に対し Γ が F で充足可能

(命題) Λ が $\mathbb{F}$ に対し強完全 $\iff$
 任意の Λ -無矛盾な Γ が $\mathbb{F}$ で充足可能。

極大無矛盾集合の性質

 Λ : 正規様相論理

- ▶ Γ が **極大 Λ -無矛盾 (Λ -MCS)** $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \Gamma$ が Λ -無矛盾、
かつ、任意の式 φ に対し $\varphi \in \Gamma$ あるいは $\neg\varphi \in \Gamma$.

(命題) Γ を Λ -MCS とする。

1. $\Lambda \subseteq \Gamma$.
2. $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi \iff \varphi \in \Gamma$.
3. $(\varphi \in \Gamma \text{ かつ } \vdash_{\Lambda} \varphi \rightarrow \psi)$ ならば $\psi \in \Gamma$.
4. $\neg\varphi \in \Gamma \iff \varphi \notin \Gamma$.
5. $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma \iff \varphi \notin \Gamma \text{ あるいは } \psi \in \Gamma$.
6. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma \text{ かつ } \psi \in \Gamma$.

リンデンバウム補題

(補題) Λ を正規様相論理とする。任意の Λ -無矛盾な Γ に対し Λ -MCS Γ^+ が存在し $\Gamma \subseteq \Gamma^+$.

Lemmon Note (1977)

E. J. Lemmon 1930-1966

Dana Scott 1932-

カノニカルモデル

 Λ : 正規様相論理

▶ Λ -カノニカルモデル $M^\Lambda = (W^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$, ただし :

$$\begin{aligned}
 W^\Lambda &:= \{ \Gamma \mid \Gamma \text{ は } \Lambda\text{-MCS} \} \\
 \Gamma R^\Lambda \Sigma &\stackrel{\text{def.}}{\iff} \text{任意の式 } \varphi \text{ に対し } (\Box \varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Sigma) \\
 \Gamma \in V^\Lambda(p) &\stackrel{\text{def.}}{\iff} p \in \Gamma
 \end{aligned}$$

(命題) $\Gamma R^\Lambda \Sigma$
 $\iff$ 任意の式 φ に対し $(\varphi \in \Sigma \Rightarrow \Diamond \varphi \in \Gamma)$.

真理補題

Λ : 正規様相論理

(真理補題) 任意の式 φ と任意の Λ -MCS Γ に対し

$$M^\Lambda, \Gamma \models \varphi \iff \varphi \in \Gamma.$$

真理補題のための補題

(補題) Γ を Λ -MCS とする。

$\Box\psi \notin \Gamma$ ならば $\{\neg\psi\} \cup \{\gamma \mid \Box\gamma \in \Gamma\}$ は Λ -無矛盾.

追加公理とカノニカルモデル

Λ : 正規様相論理

(補題)

1. $T \in \Lambda$ のとき R^Λ は反射的
2. $B \in \Lambda$ のとき R^Λ は対称的
3. $D \in \Lambda$ のとき R^Λ は継起的
4. $4 \in \Lambda$ のとき R^Λ は推移的
5. $5 \in \Lambda$ のとき R^Λ はユークリッド的

追加公理とカノニカルモデル (続)

Λ : 正規様相論理

(補題) $\perp \in \Lambda$ のとき R^Λ は有向的.

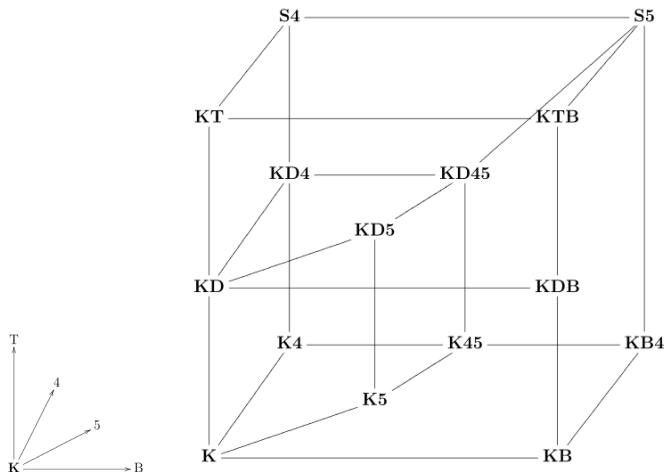
正規様相論理の強完全性証明

(定理) 任意の $\Sigma \subseteq \{T, B, 4, 5, D, .2\}$ に対し $K\Sigma$ は Σ が定義するフレームクラス $\mathbb{F}_\Sigma$ に対して強完全。

($\therefore$) $\Lambda := K\Sigma$ とおく。

1. Γ が Λ -無矛盾とする。
2. リンデンバウム補題より Λ -MCS $\Gamma^+ \supseteq \Gamma$ が存在。
3. 真理補題より $M^\Lambda, \Gamma^+ \models \Gamma$.
4. M^Λ のフレーム部分は追加公理に関する補題群より Σ の定義するフレームクラス $\mathbb{F}_\Sigma$ に属す (証終)

T, B, 4, 5, D から定まる正規様相論理



from <http://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/>