真理論講義 3　真理から様相へ

黒川英徳

2015 年 8 月 21 日

講義 3 の概要

- この講義では，真理述語を特徴づける T-schema を弱めることで得られる理論，形式体系について議論する.（この立場は先程の分類では B2 の立場, i.e. 古典論理を維持し，真理に関する公理などを制限することで矛盾を回避.）
- 議論のポイントの一つは，T-schema を弱めることとある種の様相概念の関係である.
- そうした様相概念に関して，まず T-schema を弱めた場合でも矛盾が起こってしまう場合について議論する（3.1）
- その後，一見したところ様相とは関係ない「真理の改訂理論」について議論する（3.2）
- 次節でまた，真理と様相（直観的な意味での「証明可能性」）に関係する述語に関する公理系を取り上げる.

3.1 知者のパラドックス・様相述語・有限公理化不可能性定理

真理の特徴付けとして，T-schema を弱めたものを使おうとする場合，公理化によって特徴付けられているものが「真理」の概念であることが明らかでなくなってしまう．

T-schema を弱めた公理によって特徴付けられる述語を truth-like な述語と呼ぶことが出来る．

どのような述語が truth-like な述語の典型と呼べるだろうか？

様相概念再訪（真理との比較）

次の様相論理の体系を見て欲しい.

1. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
2. $\Box\varphi \to \varphi$
3. $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \Box\varphi}$

これは様相論理 S 4 の体系.

この様相オペレータを述語と読み直す.

すると，これは $\varphi \to T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ を推論規則の形に弱め，公理 1 と組み合わせた体系に見えてくる．T-schema から S 4 のような体系は勿論導出できるが，その逆は無理.

このようにして，特に 2 のような公理を持つ様相論理の体系は，様相オペレータを述語と読み直すと真理論と近い性質を持つことが分かる.

「真理」と弱めると我々は「様相」に出会う.

知識と（非形式的な意味での）証明可能性

T-schema を弱めた，$T(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$ を持つ体系は,「知識」,（直観的）「証明可能性」という概念と深く関係.

1) 知識：Plato 以来とされる「justified true belief」という知識の特徴付けから，知識の条件は次のようになる.

i) 真であること.（知られていることは真である.）
ii) 正当化（証明）されていること.

2) （直観的な意味での）証明可能性
i) 真であること.（証明されたことは真である.）
ii) 証明可能ならば，直観的に証明可能であるという言明が証明可能.

これらの条件が十分であるかどうかは別として，これらは各々の概念の必要条件.

オペレータを述語に変える　形式体系 M

$\mathcal{L}_K :=$ 算術の言語 $\mathcal{L}$ に原始述語 $K()$ を付加したもの.

この言語で上の条件を形式的に表現し，算術の体系 Q に付加すると次のようになる．この体系を M と呼ぶ.

公理　1. Q の公理

2. $K(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$

推論規則 Nec　$\dfrac{\vdash_M \varphi}{\vdash_M K(\ulcorner\varphi\urcorner)}$

知者（Montague-Myhill ）のパラドックス (1)

しかしながら，オペレータを単純に述語に変えることの代償は安くない．次の定理が証明できる．

定理：体系 M は矛盾する．

証明）体系 M において，対角化補題より，
$\vdash_M \gamma \leftrightarrow \neg K(\ulcorner\gamma\urcorner)$ が証明できる．

1. $\gamma \rightarrow \neg K(\ulcorner\gamma\urcorner)$ (対角化）
2. $K(\ulcorner\gamma\urcorner) \rightarrow \gamma$ （公理）
3. $K(\ulcorner\gamma\urcorner) \rightarrow \neg K(\ulcorner\gamma\urcorner)$（1,2, prop logic）
4. $\neg K(\ulcorner\gamma\urcorner)$ （4, prop logic）
5. γ
6. $K(\ulcorner\gamma\urcorner)$ (Nec) $\boxtimes$

知者（Montague-Myhill）のパラドックス (2)

- ここでの公理，推論規則は，知識（証明可能性）概念に関する基本原理なので，この矛盾は「パラドックス」に値すると言える．

- 一般に公理よりもそれに対応した推論規則の方が演繹的な力は弱くなる．

- 知識の概念が演繹的な科学の中で真理の概念ほど強く必要とされるかどうかはよく分からないが，

- 真理の場合よりも弱い前提に基づくという意味では，この体系における矛盾は Tarski の結果よりも強い結果と言える．

- なお，ここでの矛盾は,「この文は知られていない」という形で知られる日常言語で表現されるパラドックスの形式的な対応物であるため，これを「知者のパラドックス」と呼ぶ．

パラドックスの意義に関する議論 (1)

1. Myhill によるパラドックスの分析：証明可能性述語の自己適用が問題（Tarski とほぼ同じ），untyped な証明可能性に関する理論は？

2. Montague の分析は全く異なる．様相述語の使用そのものが問題.

パラドックスの意義に関する議論 (2)

（背景）Quine の様相論理批判：

１）様相述語を文（閉論理式）の名前に適用するもの
２）様相オペレータを文（閉論理式）に適用するもの
３）様相オペレータを自由変項を持つ論理式に適用するもの

Quine は３）が問題であると言う.
$\Box A(x)$ のような式（x は自由変項）が与えられた場合，この外側から存在量化子をかけて $\exists x \Box A(x)$ のような式（あるいは文）を構成することが出来る．この存在量化子の解釈は,「必然的に $A(x)$ であるような x が存在する」となり，存在者が必然的にもつ性質ということになる．このため Quine はこれをアリストテレス的本質主義の復活であるとして批判.

パラドックスの意義に関する議論 (3)

- Quine のこうした様相論理批判を受け，Montague は Quine が無害とみなした１）の場合でもそれが算術と組み合わされる場合には問題となり得ることを示した．

- Montague の議論は，言語を問題にしているため，あえて言えば B1 に近いが，矛盾した体系の無矛盾な下位体系を定式化するという，通常の意味での「解決」にではなく，パラドックスから数学的定理を「取り出す」ための議論のみに関心をもっている．

知者のパラドックスから有限公理化不可能性へ (1)

Montague のもう一つの体系 M':

公理　1. Q の公理　　2. $K(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$

3. $K(\ulcorner K(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi\urcorner)$

4. $K(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner) \to (K(\ulcorner\varphi\urcorner) \to K(\ulcorner\psi\urcorner))$

推論規則　$\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash_{M'} K(\ulcorner\varphi\urcorner)}$, where φ is a logical axiom.

論理で導出可能ということを $\vdash_L$ と書くと，次が証明可能.

命題：$\dfrac{\vdash_L \varphi}{\vdash_{M'} K(\ulcorner\varphi\urcorner)}$

証明）M' の証明の長さに関する帰納法.

知者のパラドックスから有限公理化不可能性へ (2)

定理：体系 M' は矛盾する．

証明）
まず，対角化定理によって，$\vdash_Q \gamma \leftrightarrow K(\ulcorner \neg\gamma \urcorner)$ を証明する．
Q の公理の連言を χ と書くと，対角化定理より，次のような言明が得られる．

$$\vdash_Q \gamma \leftrightarrow K(\ulcorner \chi \to \neg\gamma \urcorner)$$
$$\vdash_L \chi \to (\gamma \leftrightarrow K(\ulcorner \chi \to \neg\gamma \urcorner))$$

ここで次の命題が証明できる，

$$\vdash_L (K(\ulcorner \chi \to \neg\gamma \urcorner) \to (\chi \to \neg\gamma)) \to (\chi \to \neg\gamma)$$

知者のパラドックスから有限公理化不可能性へ (3)

ところで，$\vdash_{M'} K(\ulcorner K(\ulcorner \chi \to \neg\gamma \urcorner) \to (\chi \to \neg\gamma)) \text{ (by ax. 4)}$

従って，$\vdash_{M'} K(\ulcorner(\gamma \to \neg\chi)\urcorner)$.

公理 2 と合わせて，$\vdash_{M'} \gamma \to \neg\chi$.

ところで，対角化定理より，$\vdash_{M'} K(\ulcorner(\gamma \to \neg\chi)\urcorner) \to \gamma$

$\vdash_{M'} K(\ulcorner(\gamma \to \neg\chi)\urcorner) \to \neg\chi$. (prop. logic)

従って，$\vdash_{M'} \neg\chi$. しかし当然，$\vdash_{M'} \chi$. $\boxtimes$

有限公理化不可能性の証明 (1)

有限公理化不可能定理の証明の準備：

X を自然数の集合，T を理論（通常は形式体系のみ），φ を T の言語における（唯一の変項 x をもつ）式とする．このとき

1) $n \in X$ のときにはいつでも $\vdash_T \varphi(\ulcorner n \urcorner)$ が成立するなら，φ は X を T において超算出する（supernumerate）と言う．

2) $n \in X$ であるのは $\vdash_T \varphi(\ulcorner n \urcorner)$ であるとき，かつそのときのみであるならば，φ は X を T において算出する（numerate）と言う．

3) x, y のみを変項として持つ T の言語の式 φ が存在し，すべての自然数について，$\vdash_T \varphi(\ulcorner n \urcorner, y) \leftrightarrow y = \ulcorner f(n) \urcorner$ が成り立つとき，f は T において関数的に算出可能（functionally numerable）と言う．

有限公理化不可能性の証明 (2)

まず次の定理を証明しておく．（後で使う．）

T を次のような条件を充たす無矛盾な形式体系，P を次の条件を充たす（一つの変項をもつ）T の言語の式とする．
１）T は Q の拡張である．
２）P は T において証明可能な文を超算出（super-numerate）する．
このとき，次のような文 φ が存在する： $\nvdash_T P(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$.

証明）φ として，$P(x)$ に関するゲーデル文 γ（$\vdash_T \gamma \leftrightarrow \neg P(\ulcorner\gamma\urcorner)$）を考える（条件２より，$P$ は第一不完全性定理に必要な可証性述語の条件の片方を充たす．つまり，$\vdash_T \gamma$ とすると，$\vdash_T P(\ulcorner\gamma\urcorner)$.）従って，$\vdash_T \gamma$ を仮定すると，$\vdash_T P(\ulcorner\gamma\urcorner)$ と $\vdash_T \neg P(\ulcorner\gamma\urcorner)$ が証明できることになる．これは T が無矛盾という仮定に反する．故に，この γ は T において証明不可能である（$\nvdash_T \gamma$）．このとき，$\vdash_T P(\ulcorner\gamma\urcorner) \to \gamma$ と仮定する．そうすると，$\vdash_T \gamma \leftrightarrow \neg P(\ulcorner\gamma\urcorner)$ であるから，$\vdash_T \neg\gamma \to \gamma$. 故に，$\vdash_T \gamma$. これは矛盾である．$\boxtimes$

有限公理化不可能性の証明 (3)

定理（有限公理化不可能性定理）

証明：
T を次の条件の成り立つ形式体系とする．x を唯一の変項としてもつ T の言語の式 $P(x)$ について，

１）T は Q の拡張（extension）である．
２）$P(x)$ は論理的に妥当な式の集合を T で超算出する．
$(\vdash_L \varphi \Rightarrow \vdash_T P(\ulcorner\varphi\urcorner))$
３）$\vdash_T P(\ulcorner\varphi\urcorner) \rightarrow \varphi$ (T の言語の各文について)

このとき，T が無矛盾ならば，T は有限公理化不可能である．

有限公理化不可能性の証明 (4)

証明）この定理の証明の着想は先述の理論 M' の矛盾の導出に基づく． T が有限公理化可能であり， χ を $\vdash_T \chi$ かつ $\{\varphi | \chi \vdash_L \varphi\} \supseteq T$ という性質を充たす文とする．

Lemma: T が Q の拡張であるとする．そのとき，すべての一項再帰関数は functionally numerable である．（証明とばし）

この Lemma と条件１）からある二項式 R が存在して， $\vdash_T R(\ulcorner \varphi \urcorner, y) \leftrightarrow y = \ulcorner \chi \dot{\rightarrow} \varphi \urcorner$ が成り立つ．このとき $S(x)$ を $\exists y (R(x, y) \wedge P(y))$ という式とする．この $S(x)$ は T において証明可能な文を超算出する．なぜなら $\{\varphi | \vdash_L \varphi\} \subseteq \{\varphi | \vdash_T P(\ulcorner \varphi \urcorner)\}$ となるからである．

ここで我々が考えている形式体系 T，述語 S は上で述べた定理の条件を充たす．そのため，$\nvdash_T S(\ulcorner\psi\urcorner) \to \psi$ となるような ψ が存在する．

他方，定義より，$\vdash_T S(\ulcorner\psi\urcorner) \to \exists y(R(\ulcorner\psi\urcorner, y) \land P(y))$ が成り立つ．このとき上述の R の条件より，$\vdash_T R(\ulcorner\psi\urcorner, y) \leftrightarrow y = \ulcorner\chi \to \psi\urcorner$ が成り立つ．従って，$\vdash_T S(\ulcorner\psi\urcorner) \to \exists y(y = \ulcorner\chi \to \psi\urcorner \land P(y))$.
$\vdash_T S(\ulcorner\psi\urcorner) \to P(\ulcorner\chi \to \psi\urcorner)$.
$\vdash_T S(\ulcorner\psi\urcorner) \to (\chi \to \psi)$.
$\vdash_T S(\ulcorner\psi\urcorner) \to \psi$．しかしこれは上の定理の適用例と矛盾．故に，$T$ は無矛盾ならば，有限公理化不可能である．☒

系：PA は有限公理化不可能である．

3.2 真理の改訂理論（意味論）(1)

ここでは，様相の話題を一端離れて，明らかに Kripke の真理論の影響下に発展した，真理の改訂理論について述べる．「様相」という話題には 3.3 で戻る．

１）まず算術の標準モデルに $T(x)$ の外延として ω の任意の部分集合を組み合わせた $(\mathbb{N}, S)$ を考える．（このとき S は ω の任意の部分集合でよい．$\emptyset$ でもよい.）また，外延の意味から，次が成り立つ．$(\mathbb{N}, S) \models T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ iff $\varphi \in S$.

２）このモデルにより，$(\mathbb{N}, S) \models \varphi$ （$\varphi \in \mathcal{L}_T$，またここで $\models$ は単純に古典的な二値論理の valuation に基づく「... は... のモデルである」という関係）となる場合，ここで真になる文を，次に真理述語の解釈を改訂した際に得られるモデル $(\mathbb{N}, S')$ の真理述語の外延の要素とするのである．

3.2 真理の改訂理論（意味論）(2)

３）これが真理述語の「改訂」のプロセスとされる．真理の改訂理論では，当初任意に選ばれた $T(x)$ の外延が改訂され，この「改訂」（revision）が（有限回あるいは超限回）繰り返される．改訂意味論はそのプロセスを「記述する」ということになる．高々ω 回の改訂を考える場合には，これは「真理述語の外延として不適切なものが排除される過程」と考えられる．

この講義では，高々有限回（$< \omega$）の改訂において，真理述語についてどのような解釈がなされるのかに焦点を合わせる．（その理由については，3.3 を参照.）

真理の改訂理論（意味論）(3)

定義：ω の部分集合 S について，改訂オペレータ Γ: $\mathcal{P}(\omega) \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)$ を次のように定義する．

$$\Gamma(S) := \{\varphi \mid \varphi \text{ は } \mathcal{L}_T \text{ の文であり，かつ } (\mathbb{N}, S) \models \varphi\}$$

この定義より，$\mathcal{L}_T$ の文 φ については，

$$(\mathbb{N}, S) \models \varphi \text{ iff } \varphi \in \Gamma(S)$$

が成り立つことが分かる．
（この定義は Kripke による段階によるモデルの構成を古典論理の上に置き直したものに相当する．古典論理に基づくため，このオペレータに不動点は存在しない.）

命題：$\mathcal{L}_T$ のどの文 φ についても，

$$(\mathbb{N}, \Gamma(S)) \models T(\ulcorner \varphi \urcorner) \text{ iff } (\mathbb{N}, S) \models \varphi.$$

このオペレータ Γ の有限回の反復は次のように帰納的に定義される．i) $\Gamma^0(S) := S$ ii) $\Gamma^{n+1}(S) := \Gamma(\Gamma^n(S))$

また真理述語 $T(x)$ の反復適用にも次のような帰納的定義を与えておく.（ここで t は $\mathcal{L}_T$ の閉項.） i) $T^1(t) := T(t)$ ii) $T^{n+1}(t) := T(\ulcorner \dot{T}^n(t)\urcorner)$

1. オペレータ Γ が表す関数は単射である.
2. $\mathcal{L}_T$ において，どの $n \in \omega$ $(n \geq 1)$ についても，

$$(\mathbb{N}, \Gamma^n(S)) \models T^n(\ulcorner \varphi \urcorner) \text{ iff } (\mathbb{N}, S) \models \varphi.$$

3. どの $n \in \omega$ $(n \geq 1)$ についても, どの $S \subseteq \omega$ についても, $\Gamma^n(S) \neq S$.

真理の改訂理論（意味論）(4)

$M \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ が与えられたとき，Γ による $S \in M$ の像の集合を次のように書く．

$$\Gamma[M] := \{\Gamma(S) | S \in M\}$$

この記法の n 回の反復は $\Gamma^n[M]$ と書く．このとき以下の二つの命題が成立する．

命題：どの $n, k \in \omega$ についても，$n \leq k$ ならば，
$\Gamma^k[\mathcal{P}(\omega)] \subseteq \Gamma^n[\mathcal{P}(\omega)]$.

真理の改訂理論（意味論）(5)

命題：[意味論版 McGee の定理]　　$\bigcap_{n\in\omega}\Gamma^n[\mathcal{P}(\omega)] = \emptyset.$

この証明では，次のような二項の原始再帰関数 f を使う対角化定理の例を考える．この f は数 n と文 φ に適用されたとき，真理述語を n 回適用した文を構成する．つまり，

$$f(n,\varphi) := \underbrace{\dot{T}(\dot{T}(\cdots(\dot{T}}_{n\text{回の適用}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\cdots)$$

(この原始再帰的関数は，関数記号 f を使って PA の中で表現され得る.）対角化補題により，次の同値式が PA の公理から（$\mathcal{L}_T$ において）証明される．

$$\vdash_{PA} \gamma \leftrightarrow \exists x \neg T\dot{f}(x,\ulcorner\gamma\urcorner)$$

3.3 Friedman-Sheard の公理系と改訂意味論

もともと Friedman-Sheard の体系というのは，Friedman-Sheard (1987) において定式化された幾つかの体系のうちの一つであった．この論文において，Friedman らは正しそうな公理と推論規則をリストアップし，それらの（古典論理上の）極大無矛盾な組合わせを作り，言わば brute force によって（意図された解釈などはなく）幾つかの，真理の自己適用を許容する公理的真理論を定式化した.

（これは非古典論理を採る Kripke の理論への直接の反応だった.）

Friedman-Sheard の体系の特徴

真理の自己適用が可能な，古典論理に基づく真理論であるため，T-schema を弱める他には矛盾を回避する手段は存在しない．このため，彼ら自身が論文の中で述べているように，Friedman らの理論は真理についてのものというよりも，むしろ真理と非形式的（直観的）な意味での証明可能性（informal provability）の間の概念 を公理的に扱ったもの（その意味である種の様相を扱ったもの）と言える．

Friedman-Sheard の公理系 FS (1)

i) FSN

FS0. PAT （帰納法のスキーマには，$T(x)$ を含む代入例が現れることを許す）

FS1. $(= CT1)$ $\forall s \forall t(T(s \underset{\cdot}{=} t) \leftrightarrow s^\circ = t^\circ)$.

FS2. $\forall x(Sent_T(x) \to (T(\underset{\cdot}{\neg} x) \leftrightarrow \neg T(x))$

FS3. $\forall x \forall y(Sent_T(x \underset{\cdot}{\vee} y) \to (T(x \underset{\cdot}{\vee} y) \leftrightarrow (T(x) \vee T(y))))$

FS4. $\forall x(Sent_T(\underset{\cdot}{\exists} vx) \to (T(\underset{\cdot}{\exists} vx) \leftrightarrow \exists t T(x(t/v)))$

Friedman-Sheard の公理系 FS (2)

ii) 推論規則 Nec, Conec

$$\text{Nec}\ \frac{\vdash_{FS}\ \varphi}{\vdash_{FS}\ T(\ulcorner\varphi\urcorner)} \qquad\qquad \text{Conec}\ \frac{\vdash_{FS}\ T(\ulcorner\varphi\urcorner)}{\vdash_{FS}\ \varphi}$$

体系 FS とは，FSN + Nec + Conec という形で得られる体系である．(ただし，Halbach により再構成されたもの．)

1) これら 2 つの推論規則は，言うまでもなく T-schema を推論規則の形に弱めたもの．

2) Nec, Conec を持つ体系は「対称的 (symmetric)」と呼ばれる．FS の internal / external logic はこれにより一致．

Friedman-Sheard の元の体系

Friedman-Sheard の元の体系を挙げておこう.（この体系を FSO と呼ぶ. この体系では $\to$, $\neg$ を原始記号として使う.）

i) Axioms Base$_T$ the axioms of PA with full induction in $\mathcal{L}_T$

$\forall x \forall y(Sent_T(x) \wedge Sent_T(y) \to (T(x \underset{\cdot}{\to} y) \to (T(x) \to T(y))))$

PAT-Refl $\forall x(Sent_T(x) \wedge Bew_{PAT}(x) \to T(x))$

T-Cons $\forall x(Sent_T(x) \to \neg(T(x) \wedge T(\underset{\cdot}{\neg} x)))$

T-Comp $\forall x(Sent_T(x) \to (T(x) \vee T(\underset{\cdot}{\neg} x)))$

U-Inf $\forall v \forall x(Sent_T(\underset{\cdot}{\forall} vx) \to (\forall t T(x(t/x)) \to T(\underset{\cdot}{\forall} vx)))$

E-Inf $\forall v \forall x(Sent_T(\underset{\cdot}{\exists} vx) \to (T(\underset{\cdot}{\exists} vx) \to \exists t T(x(t/x))))$

ii) Rules of inference

T-intro $\varphi / T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ T-elim $T(\ulcorner \varphi \urcorner)/\varphi$

$\neg T$-Intro $\neg\varphi / \neg T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ $\neg T$-Elim $\neg T(\ulcorner \varphi \urcorner)/\neg\varphi$

Friedman-Sheard　数学的な事実

命題

1) FSN に次の式を付加した理論は矛盾する.

$$\text{T-sym: } \forall t(T(\ulcorner \underset{\cdot}{T}(t)\urcorner) \leftrightarrow T(t^\circ))$$

2) $FS \vdash \forall x(Sent_T(x) \wedge Prov_{PAT} \rightarrow T(x))$ (global reflection principle の証明可能性)

Friedman-Sheard の体系と真理の改訂理論の公理化

1) FS は改訂理論とは全く独立の起源を持つが（共通するのは，真理の自己適用を認め，古典論理を保持すること），

2) しかしながら，意外なことに，FS の体系に適切な制限を加えたものは，改訂の回数が高々有限的な場合の改訂理論の公理化になっている．

体系　FS_n

$[FS_n]$

$FS_0 := PAT$（帰納法の schema に $\mathcal{L}_T$ の式の代入例を認める.）

$FS_1 := FSN$（FS-Nec, Conec）$+$

GRP for PAT : $\forall x(Sent_T(x) \wedge Prov_{PAT} \rightarrow T(x))$.

FS_n（$n > 1$ の場合）は次の点を除いて，FS と同じ体系：

Nec は高々$n-1$ 個の互いに異なった文に 適用され得るのみ. $Conec$ についても同様である.

真理の改訂理論の FS_n による公理化

定理
いかなる $S \subseteq \omega$ についても，$S \in \Gamma^n[\mathcal{P}(\omega)]$ iff $(\mathbb{N}, S) \models FS_n$

証明）１）$n = 0$．この場合には，$T(x)$ の外延にはいかなる制約も加えられない．どのような集合（$\subseteq \omega$）でも FS_n のモデル $(\mathbb{N}, S)$ の S となる（その逆も成立）．

２）$n = 1$ の場合
$\Rightarrow$) $S \in \Gamma^1[\mathcal{P}(\omega)]$ と仮定する．$\Gamma^1[\mathcal{P}(\omega)]$ の定義より，これは
$S \in \{\Gamma(S) | S \in \mathcal{P}(\omega)\}$．つまり，$\exists S' \in \mathcal{P}(\omega)$, $S = \Gamma(S')$.
この S については，$(\mathbb{N}, S') \models PAT$.
従って，すべての PAT の定理 φ について，$(\mathbb{N}, \Gamma(S')) \models T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
故に，$(\mathbb{N}, \Gamma(S')) \models \forall x(Sent_T(x) \wedge Prov_{PAT} \rightarrow T(x))$.
即ち，$(\mathbb{N}, S) \models \forall x(Sent_T(x) \wedge Prov_{PAT} \rightarrow T(x))$.
他の公理についても同様にこの解釈で正しいことを示せばよい．

⇐) $(\mathbb{N}, S) \models FS_1$ と仮定する． $S' := \{k | (\mathbb{N}, S) \models T(\ulcorner \underset{\cdot}{T}(\overline{k}) \urcorner)\}$ $(= \{k | T(\overline{k}) \in S\})$ と定義する．ここで，まず次の命題を証明する．

命題： $k \in S'$ iff $\exists$ a cltm t, s.t. $T(t) \in S$ and $\mathbb{N} \models t^\circ = k$.

次に，$\Gamma(S') = S$ を $\mathcal{L}_T$ の式の正の複雑さに関する帰納法によって証明する.（帰納法の詳細は読者に委ねる.）

３）$n > 1$ の場合.

$\Rightarrow$) $S \in \Gamma^{n+1}[\mathcal{P}(\omega)]$ と仮定する.
$(\mathbb{N}, S) \models FS_{n+1}$ を証明することがここでの目標である.

$n \leq k$ のとき $\Gamma^{k}[\mathcal{P}(\omega)] \subseteq \Gamma^{n}[\mathcal{P}(\omega)]$ となるため,
$S \in \Gamma^{n+1}[\mathcal{P}(\omega)]$ ならば $S \in \Gamma^{n}[\mathcal{P}(\omega)]$ であり,
IH によって，$(\mathbb{N}, S) \models FS_n$ が既に成り立っていることが分かる.

従って，FS_{n+1} が Nec, Conec の $n+1$ 回目の適用について閉じていることを $(\mathbb{N}, S)$ が正当化することができれば十分.

Nec の場合：($(\mathbb{N}, S) \models T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ を示すことが目標.）
$S = \Gamma(S')$ となる S' を考えると，$FS_n \vdash \varphi$ は，$(\mathbb{N}, S') \models \varphi$ を含意.
従って，$(\mathbb{N}, \Gamma(S')) \models T(\ulcorner\varphi\urcorner)$. 故に，$(\mathbb{N}, S) \models T(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

Conec の場合：$FS_n \vdash T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ を仮定する．
どの $S' \in \Gamma^n[\mathcal{P}(\omega)]$ についても，$(\mathbb{N}, S') \models T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ (IH $\Rightarrow$).

従って，どの $S'' \in \Gamma^{n-1}[\mathcal{P}(\omega)]$ についても，$(\mathbb{N}, S'') \models \varphi$) (上で示した事実より）．

ところで，$\Gamma^{n+1}[\mathcal{P}(\omega)] \subseteq \Gamma^{n-1}[\mathcal{P}(\omega)]$ かつ $S \in \Gamma^{n+1}[\mathcal{P}(\omega)]$.

$S \in \Gamma^{n-1}[\mathcal{P}(\omega)]$ も成り立つ.
故に，$(\mathbb{N}, S) \models \varphi$.

$\Leftarrow$) $(\mathbb{N}, S) \models FS_{n+1}$ と仮定する．
$S' = \{k | (\mathbb{N}, S) \models T(\overline{k})\}$ とおくと，S' は次の性質を充たす．

$$S' = \{\varphi | T(\ulcorner\varphi\urcorner) \in S\} = \{\varphi | (\mathbb{N}, S) \models T(\ulcorner \underset{\cdot}{T}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)\}$$

これが次の性質を充たすことを証明するのがここでの目標.

i) $S' \in \Gamma^n[\mathcal{P}(\omega)]$　かつ　ii) $S = \Gamma(S')$.

(何故なら，これが証明できれば，$\exists S^* \in \mathcal{P}(\omega)$,
$S = \Gamma^{n+1}(S^*)$ を示すのに十分であり，従って，
$S \in \Gamma^{n+1}[\mathcal{P}(\omega)]$ を証明できるから.）

ii) の証明は本質的に $n = 1$ の場合と同じ.

以下 i) を次のように証明する．
$FS_n \vdash \varphi$ から $FS_{n+1} \vdash T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ を推論できる．

仮定より，$(\mathbb{N}, S) \models T(\ulcorner\varphi\urcorner)$．つまり，$(\mathbb{N}, \Gamma(S')) \models T(\ulcorner\varphi\urcorner)$．

故に，上で示した命題より，$(\mathbb{N}, S') \models \varphi$．

従って，$(\mathbb{N}, S')$ は FS_n のモデルである．（FS_n の規則に関して閉じているから．）

IH により，$S' \in \Gamma^n[\mathcal{P}(\omega)]$．

Reference

Cantini, A., Logical Frameworks for Truth and Abstraction, 1996

Halbach, V., Axiomatic Theories of Truth, 2011

Horsten, L., The Tarskian Turn, 2010

Kripke, Outline of a theory of truth, Journal of Philosophy, 1975

McGee, V., Truth, Vageuenss and Paradox, An essay on the logic of truth, 1991

Montague, R., Syntactical treatments of modality, with corollaries on reflection principles and finite axiomatizability, Acta Philosophica Fennica 16, 1963

Tarski, A., The concept of truth in formalized languages, reprinted in Logic, Semantics, Metamathematics, 1983