真理論講義 2　（Kripke の真理論）

黒川英徳

2015 年 8 月 20 日

1.1 Kripke の真理論　目的 (1)：真理の自己適用

- 型付きの真理論の最大の問題点：表現力の弱さ

$T(\ulcorner T(\ulcorner 2+2=4 \urcorner) \urcorner)$ のような一見無害に見える真理述語の自己適用も正しいものではないとされる．

真理述語の自己適用を認める：型のない真理論を採用する．

しかし，真理述語の無制約は自己適用は，矛盾を導いてしまう．

どうすればよいか？

Kripke, "Outline of a theory of truth" 1975

Kripke の真理論　目的 (2)：自己言及

- 算術においては，対角化定理より，自己言及は不可避.
- Kripke 自身の議論の一つ：　自然言語においては，自己言及は経験的事実によって起こってしまうこともある.

「slide set 2 の 3 ページの 5 行目の文は偽である」

（70 年代には，自然言語の意味論はかなり浸透していた. Montague grammer，等）

自己言及は与件として扱う.

Kripkeの真理論　目的 (3)：階層理論の難点

- 真理の階層理論は，自然言語における真理述語の理論化としては不自然．

B：「Aの言ったことはすべて真である」
A：「Bの言ったことはすべて偽である」

のような場合に，真理述語の階層を考えることは難しい．

- またテクニカルな観点からも，超限的なレベルにまで階層を上げていくと，ordinal notation などを導入しなくてはならず，面倒．

真理述語は,（対象言語の中にある）自己適用を許す単一の述語で済ませたい．

Kripkeの真理論　目的 (4)：本当つき文と嘘つき文の違い

次の文を考えてみて欲しい.

$\sigma \leftrightarrow T(\ulcorner \sigma \urcorner)$

このような文は, $\mathcal{L}_T$ で表された算術の体系 Q で証明可能である.（上で述べた「嘘つき文」と同様.）

これの自然言語における対応物は,「この文は真でない」になる.
（これらの両方をここでは「本当つき文」と呼ぶ.）

これらの文の区別をすることは, 型付きの真理論の観点からは不可能.

本当つき文と嘘つき文の違い（続き）

ところが，τ のような「本当つき文」は $2+2=4$ のような文とも直観的に異なる．

こうした違いを基に，文を分類すると，少なくとも次のようなカテゴリーが考えられる．

1）非意味論的な事実に基づく（e.g., $2+2=4$）．

2）非意味論的な事実に基づかない．

2.1) 矛盾を導く（e.g., 嘘つき文）

2.2) 矛盾を導かない（e.g., 本当つき文）

Kripke の目的の一つは，こうした違いを（数学的に正確に）特徴づけることができる枠組みを与えることである．

Kripkeの基本的な着想 ：非古典論理の使用

- こうした（少なくとも４つの理由から）真理述語の自己適用を許す理論を構成すべき理由を Kripke は持っていた.
- Tarski の T-schema そのものではないが，それにできるだけ近い真理述語にとって adequacy condition を充足しながら，真理の適用を許容することが目標.

このために Kripke は，真理述語を理論化する際の理論が基づく論理を，古典論理からある種の非古典論理を採用.

これは Feferman による上述の分類では B3 にあたる.

部分性と Strong Kleene 3-valued logic

- 直観的には，Kripke が非古典論理を用いて，彼の真理論の中に導入しようとしたのは,「部分性」（partiality）の概念である.
- どの well-formed な文も，真か偽であるという二値性の原理を捨て，ある種の文（典型的には嘘つき文など）は真でも偽でもないという可能性を認める.
- こうした部分性の概念を表現するために，Kripke は Strong Kleene Three-valued logic を採用する.

Strong Kleene 3-valued logic の真理表

- Strong Kleene 3-valued logic の否定と選言に関する真理表は次のようになる．

p	$\neg p$
T	F
U	U
F	T

$\vee$	T	U	F
T	T	T	T
U	T	U	U
F	T	U	F

- 等号，真理述語まで含めた意味論的解釈は後ほど述べる．

Kripke の意味論的真理論の特徴 (1)

- Kripke の真理論の特徴は次のようにまとめられる．

i) $\mathcal{L}_T$ のうち，真理述語を含まない部分 $\mathcal{L}$ の解釈は算術の標準モデルによる．

ii) 真理述語には階層はなく，真理述語 $T(x)$ が一つだけ算術 $\mathcal{L}$ に付加されており，真理述語の自己適用が可能である．
(これは必ずしも，対象言語とメタ言語の区別が不要な，言わば「普遍言語」を可能にしたということではない．対象言語の中に真理述語を入れたということ．)

Kripke の意味論的真理論の特徴 (2)

iii)　$T(x)$ の解釈は,「外延」(extension) と「反外延」(anti-extension) のペアによる.

a. $T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ が成り立つ　iff φ（のコード）が $T(x)$ の外延のうちにある.
b. $\neg T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ が成り立つ　iff φ（のコード）が $T(x)$ の反外延のうちにある.

ここで外延と反外延の和集合が（ここでの解釈の underlying set である）自然数の集合と一致する必要はない.

この点で，Kripke の真理述語の解釈は非古典的な性質を持つ.

外延と反外延のギャップに文が入る場合が当の文が真でも偽でもない場合に対応する.

算術の解釈については完全に古典的な解釈を取りながら，非古典的な真理述語の解釈を採っている.

$\mathcal{L}_T$ の解釈となる構造の定義 (1)

- まず準備として，次の概念を定義する．

[正の部分に関する式の複雑さ，p.c.]

1. 原子式とその否定の p.c. は 0 とする．

2. φ の p.c. を n とすると，$\neg\neg\varphi$, $\forall x\varphi$, $\neg\forall\varphi$, $\exists x\varphi$, $\neg\exists x\varphi$ の p.c. は $n+1$ である．

3. φ, ψ の p.c. をそれぞれ，n, m とすると，$\varphi \vee \psi$, $\neg(\varphi \vee \psi)$ の p.c. はそれぞれ $max(n, m) + 1$ である．

$\mathcal{L}_T$ の解釈となる構造の定義 (2)

i) 基底モデル（the ground model），$T(x)$ を除いた $\mathcal{L}$ の解釈を与える）を算術の標準モデル $\mathbb{N}$ とする．

ii) 真理述語の解釈となる「外延」,「反外延」をそれぞれ S_1, S_2，その組を (S_1, S_2) とする．

iii) それらの組からなる構造 $(\mathbb{N}, (S_1, S_2))$ を考える
iv) この構造と言語 $\mathcal{L}_T$ の関係を以下で帰納的に定義する．

Note: 我々は特に 3 値論理について考えるので，$S_1 \cap S_2 = \emptyset$ とする．
この条件をはずした場合，このモデルは 4 値論理に対応.

$\models_{SK}$ の帰納的定義

$S_1, S_2 \subseteq \omega$ である S_1, S_2 に関して，$\mathcal{L}_T$ のすべての閉項 s, t, $\mathcal{L}_T$ の文 φ, ψ, また（x のみを自由変項とする）$\mathcal{L}_T$ の式 $\chi(x)$ について，構造 $(\mathbb{N}, (S_1, S_2))$ と $\mathcal{L}_T$ の関係 $\models_{SK}$ は（p.c. に関する帰納法に基づいて）次のように定義される．

(解釈の領域に入っているすべての対象は名前を持つと仮定しているため（基本的には算術のモデルを考えていることに注意）satisfaction relation は使用しない．)

1. $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} s = t$ iff s, t の値が一致する.
2. $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \neg s = t$ iff s, t の値が異なる.
3. $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} T(t)$ iff t は S_1 の中にある $\mathcal{L}_T$ の文を値としてもつ閉項である.
4. $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \neg T(t)$ iff t は S_2 の中にある $\mathcal{L}_T$ の文を値としてもつ閉項であるか，あるいは $\mathcal{L}_T$ の文を値としてもたない閉項である.
5. $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \neg\neg\varphi$ iff $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \varphi$.
6. $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \varphi \vee \psi$ iff $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \varphi$ 或いは $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \psi$.
7. $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \neg(\varphi \vee \psi)$ iff $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \neg\varphi$ かつ $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \neg\psi$.
8. $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \exists x \chi(x)$ iff ある $n \in \omega$ について，$(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \chi(\overline{n})$.
9. $(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \neg\exists x \chi(x)$ iff どの $n \in \omega$ についても，$(\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \neg\chi(\overline{n})$.

2.2 Kripke の不動点意味論

- これまでは，SK に基づく解釈が充たす一般的な条件を記述してきたにすぎない．

- しかし，これらの解釈の中で，さらに特殊な条件を充たすものは，真理述語に関する特に有益な性質を充たすことが知られている．その性質について述べるために，まずオペレータ $\Lambda : (S_1, S_2) \mapsto (S_1', S_2')$ を次のように定義する．
  ($NSent$ は「$\mathcal{L}_T$ の文ではない」という性質を充たすものの集合である．)

$$\Lambda(S_1, S_2) := (\{\varphi \in \mathcal{L}_T | \ (\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \varphi]\}, NSent \cup \{\varphi \in \mathcal{L}_T | \ (\mathbb{N}, (S_1, S_2)) \models_{SK} \neg\varphi\})$$

以下，$(S_1, S_2) \subseteq (S_1', S_2')$ とは，これらに現れる集合が coordinatewise に部分集合になっていることとする．
$\Lambda(S_1, S_2) = (S_1, S_2)$ となる (S_1, S_2) を Λ の不動点という．

- 不動点意味論によって何が可能になるのか？

- 結論から先に言えば，Λ の不動点となる (S_1^*, S_2^*) は Tarski の規約 T の類比物と言える次の性質を充たす.

定理

$(\mathbb{N}, (S_1^*, S_2^*)) \models_{SK} T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ iff $(\mathbb{N}, (S_1^*, S_2^*)) \models_{SK} \varphi$.

証明）$(\mathbb{N}, (S_1^*, S_2^*)) \models_{SK} T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ iff $\ulcorner\varphi\urcorner \in S_1^*$ (df of $\models_{SK}$.)
iff $\ulcorner\varphi\urcorner \in D_1(\Lambda(S_1^*, S_2^*))$ ((S_1^*, S_2^*) は Λ の不動点）
iff $(\mathbb{N}, (S_1^*, S_2^*)) \models_{SK} \varphi$ (Λ の定義） $\boxtimes$

不動点の存在証明 (1)

定理
Λ の（極小）不動点が存在する．

ここで，Λ の不動点 (S_1^*, S_2^*) の存在証明の outline を見て行く．（この不動点の存在定理はは，より一般的な Tarski-Knaster の不動点定理の特殊ケース．）

Kripke は，真理述語を持たない言語に段階的に真理述語を導入していくという直観的な描像を使って自らのアイデアを説明している．

以下の証明では，求めるべき集合を順序数上で近似していくことによって，最終的に不動点が存在することを証明するという風に議論が展開する．この証明は Kripke の直観的アイデアに近い形で不動点の存在を証明している．

不動点の存在証明 (2)

まず，超限帰納法により，(S_1^α, S_2^α) を定義する．

1) $\alpha = 0$ のとき，$(S_1^0, S_2^0) = (\emptyset, \emptyset)$

2) α が後者順序数（a successor ordinal，$\alpha = \beta + 1$）のとき，
$(S_1^{\beta+1}, S_2^{\beta+1}) = (\{\varphi \in \mathcal{L}_T |\ (\mathbb{N}, (S_1^\beta, S_2^\beta)) \models_{SK} \varphi\}$,
$NSent \cup \{\varphi \in \mathcal{L}_T |\ (\mathbb{N}, (S_1^\beta, S_2^\beta)) \models_{SK} \neg\varphi\})$,

i.e. $(S_1^{\beta+1}, S_2^{\beta+1}) = \Lambda(S_1^\beta, S_2^\beta)$.

3) α が極限順序数（a limit ordinal）のとき，
$(S_1^\alpha, S_2^\alpha) = (\bigcup_{\beta<\alpha} S_1^\beta, \bigcup_{\beta<\alpha} S_2^\beta)$.

不動点の存在証明 (3)

定義：$(S_1^\alpha, S_2^\alpha) \subseteq \Lambda(S_1^\alpha, S_2^\alpha)$ という条件を充たす (S_1^α, S_2^α) を sound であるという．

ここで次の Lemma を証明する．

Lemma [(S_1^0, S_2^0) is a sound element]
$(S_1^0, S_2^0) \subseteq \Lambda(S_1^0, S_2^0)$

証明）$(S_1^0, S_2^0) = (\emptyset, \emptyset)$ により，明らか．$\boxtimes$

Lemma [monotonicity]
$(S_1^\gamma, S_2^\gamma) \subseteq (S_1^\delta, S_2^\delta)$ ならば，$\Lambda(S_1^\gamma, S_2^\gamma) \subseteq \Lambda(S_1^\delta, S_2^\delta)$

証明）式の p.c. に関する帰納法による．

不動点の存在証明 (4)

Lemma $(S_1^\alpha, S_2^\alpha) \subseteq (S_1^{\alpha+1}, S_2^{\alpha+1})$ for any $\alpha \in \mathit{Ord}$

証明）超限帰納法による．$\alpha = 0$ のとき，上の Lemma より $(S_1^0, S_2^0) \subseteq (S_1^1, S_2^1)$

α が successor $\alpha = \beta + 1$ のとき．$(S_1^\beta, S_2^\beta) \subseteq (S_1^{\beta+1}, S_2^{\beta+1})$ を仮定する．Monotonicity より，$\Lambda(S_1^\beta, S_2^\beta) \subseteq \Lambda(S_1^{\beta+1}, S_2^{\beta+1})$. しかしこれは，$(S_1^{\beta+1}, S_2^{\beta+1}) \subseteq (S_1^{\beta+2}, S_2^{\beta+2})$.

不動点の存在証明 (5)

(S_1^α, S_2^α) の α が limit のとき，任意の $\beta < \alpha$ について，$(S_1^\beta, S_2^\beta) \subseteq (S_1^{\beta+1}, S_2^{\beta+1})$ (IH). そうした β を一つ取って議論する．

limit の場合の定義より（union），この $\beta < \alpha$ について，$(S_1^\beta, S_2^\beta) \subseteq (S_1^\alpha, S_2^\alpha)$.

Monotonicity により，$\Lambda(S_1^\beta, S_2^\beta) \subseteq \Lambda(S_1^\alpha, S_2^\alpha)$. 故に，$(S_1^{\beta+1}, S_2^{\beta+1}) \subseteq (S_1^{\alpha+1}, S_2^{\alpha+1})$.

IH により，$(S_1^\beta, S_2^\beta) \subseteq (S_1^{\alpha+1}, S_2^{\alpha+1})$.

β $(\beta < \alpha)$ は任意であったから，
$(\bigcup_{\beta<\alpha} S_1^\beta, \bigcup_{\beta<\alpha} S_2^\beta) \subseteq (S_1^{\alpha+1}, S_2^{\alpha+1})$.
従って，$(S_1^\alpha, S_2^\alpha) \subseteq (S_1^{\alpha+1}, S_2^{\alpha+1})$ $\quad\boxtimes$ (Lemma)

不動点の存在証明 (6)

ここで最終的に定理の証明に移る．

しかし，この列（クラス）は strictly increasing ではあり得ない． 実際，S_1^α, S_2^α は，1) 単調，2) non-strictly increasing な順序数サイズの「列」（クラス）である．

S_1^α, S_2^α は高々可算個の要素しかもたない（それぞれ ω の部分集合である）から，*Ord* のどこかで S_1^α, S_2^α は新しく増える要素を持たないことになる．
従って，$\Lambda(S_1^\gamma, S_2^\gamma) = (S_1^\gamma, S_2^\gamma)$ となるような γ が存在する．
⊠ （定理）

「基底的」と「パラドクシカル」(1)

Kleene 強三値論理を使って不動点の存在を証明する場合には，不動点は無限個存在することが知られている．上述の議論により与えられる不動点は最小不動点であった．

i) 例えば「本当つき文」のように，矛盾を導くわけではないが標準モデルで真にも偽にもならない文は上のモデルで真でも偽でもない．しかし,「本当つき文」（のコード）を S_1^* か S_2^* に予め入れておいて，上のようなモデルの構成をすれば，$S_1^* \subset S_1^{*\prime}$ となる別の不動点 $(S_1^{*\prime}, S_2^{*\prime})$ を構成できる．

ii) それに対し，嘘つき文は極小不動点モデルで真にも偽にもならないというばかりでなく，どのような不動点を取るモデルにおいても，矛盾を引き起こさずにその外延，反外延の要素になることは出来ない．

このことから，先程論じた文の直観的な分類には正確な数学的定義を与えることが可能になる

「基底的」と「パラドクシカル」(2)

定義

1. φ が基底的（grounded）であるのは文 φ の真・偽が基底モデル（the ground model）の文の真・偽によって決まるとき（かつそのときのみである）.

2. 文 φ が非基底的（ungrounded）のはそうでない場合である.

3. 文 φ が逆説的（paradoxical）であるのはどの不動点についても，φ（のコード）がその要素にならないとき（かつそのときにのみ）である.

「基底的」と「パラドクシカル」(3)

この分類によれば,

i) 嘘つき文は逆説的な文であり,

ii) 本当つき文は非基底的だが逆説的でない文,

iii) $T(\ulcorner 2+2=4 \urcorner)$ は基底的な文の例ということになる（この文の真・偽は $2+2=4$ が標準モデルで真であることによって決まっている）.

2.3 Kripke の意味論的真理論の公理化

i) Kremer
ii) Feferman / Cantini
iii) Halbach & Horsten

ここでは Feferman による公理化 KF について見て行く.

Feferman の公理化は closing off と呼ばれる手法に基づく. 不動点モデルで (S_1, S_2) というペアの持つ性質を一つの集合 S_1 で表すようにすること. $((\mathbb{N}, (S_1, S_2))$ から，$(\mathbb{N}, S_1)$ を構成すること.）そのため，KF という公理系は古典論理に基づくものとなる． ここで使われる Kripke 真理集合とは, closing-off をすることで，得られる S_1 に対応している.

Kripke 真理集合の定義

集合 $S \subseteq \omega$ が「Kripke 真理集合」であるのは，それが次の条件を充たすとき，かつそのときのみである．$n \in S$ iff

1. n が $t = s$ で t の値は s の値と同一である $\mathcal{L}_T$ の閉項 t, s が存在するか,

2. n が $\neg t = s$ で t の値は s の値と異なる $\mathcal{L}_T$ の閉項 t, s が存在するか,

3. n が $T(t)$ でその値が S の中の或る $\mathcal{L}_T$ 文である閉項が存在するか，あるいは,

4. n が $\neg T(t)$ で，t の値が $\mathcal{L}_T$ の文でないか，t の値が $\neg\xi \in S$ となる $\mathcal{L}_T$ 文 ξ である閉項が存在するか，あるいは,

5. n が $\neg\neg\varphi$ で，$\varphi \in S$ である $\mathcal{L}_T$ の文 φ が存在するか,

6. n が $\varphi \vee \psi$ で，$\varphi \in S$ あるいは $\psi \in S$ である $\mathcal{L}_T$ の文 φ, ψ が存在するか,

7. n が $\neg(\varphi \vee \psi)$ で，$\neg\varphi \in S$ かつ $\neg\psi \in S$ である $\mathcal{L}_T$ の文 φ, ψ が存在するか,

8. n が $\exists v\psi$ で，ある閉項 t について $\psi(v/t) \in S$ である $\mathcal{L}_T$ の文 $\exists v\psi$ が存在するか,

9. n が $\neg\exists v\psi$ で，どの閉項 t にも $\neg\psi(v/t) \in S$ である $\mathcal{L}_T$ の文 $\exists v\psi$ が存在するか，である.

無矛盾性条件

ここでさらに，先程の $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ に対応する S の条件（無矛盾性条件）：

$$\varphi, \neg\varphi \in S \text{ となるような } \mathcal{L}_T \text{ の文は存在しない}$$

を充たす Kripke 真理集合は,「無矛盾な Kripke 真理集合」である.

Kripke truth lemma

ある集合 $S \subseteq \omega$ が Kripke 真理集合であるのは，次の条件が充たされるときかつそのときのみである．（以下で t, s は（$\mathcal{L}_T$ の）閉項，φ, ψ, $\forall v\chi$ は $\mathcal{L}_T$ の文である．）

1. $s = t \in S$ iff t と s の値が一致する．
2. $\neg s = t \in S$ iff t と s の値が異なる．
3. $\neg\neg\varphi \in S$ iff $\varphi \in S$
4. $\varphi \vee \psi \in S$ iff $\varphi \in S$ あるいは $\varphi \in S$
5. $\neg(\varphi \vee \psi) \in S$ iff $\neg\varphi \in S$ かつ $\neg\varphi \in S$
6. $\exists v\chi \in S$ iff ある n について $\chi(\overline{n}) \in S$
7. $\neg\exists v\chi \in S$ iff すべての n について $\neg\chi(\overline{n}) \in S$
8. $T(t) \in S$ iff t の値が S の中の $\mathcal{L}_T$ 文である．
9. $\neg T(t) \in S$ iff t の値がその否定が S の中の $\mathcal{L}_T$ 文である $\mathcal{L}_T$ 文であるか，あるいは t の値が $\mathcal{L}_T$ 文でないか，である．

オペレータ Φ の不動点

上の S の定義の右辺を $\zeta(n, S)$ と書く．
このとき，S は正の出現（occurrence）しか持たない（否定の奇数個の出現の scope に入らない）．
このことから，この S という集合の充たす性質について調べるために正の帰納的定義（positive inductive definition）に関する理論を使うことができる．
それ故，$\zeta(n, S)$ から，オペレータ $\Phi : \mathcal{P}(\omega) \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)$ を $\Phi(S) := \{n | \zeta(n, S)\}$ のように定義すると，次の定理が成り立つ．

定理

S が Kripke 真理集合になるのは，S が Kripke 集合となるのは，S が Φ の不動点（$S = \Phi(S)$）になるとき，かつそのときのみである．

(S_1, S_2) についての不動点と S についての不動点の関係

命題

1. (S_1, S_2) が Λ の不動点ならば，S_1 は Φ の不動点である．

2. S_1 が Φ の不動点であり，かつ
$S_2 := Nsent \cup \{\varphi \in \mathcal{L}_T | \neg\varphi \in S_1\}$ とするならば，(S_1, S_2) は Λ の不動点となる．

証明）(outline)
1. (S_1, S_2) が Λ の不動点であると仮定する．
上の命題より，S_1 がクリプキ真理集合であることを証明すれば，十分である．そのためには Kripke Truth Lemma の条件を充たせば十分．このことを証明するために，次の主張を文の「正の複雑さ」についての帰納法により証明する．

$$\mathcal{L}_T \text{ におけるすべての } \varphi \text{ について，} \varphi \in S_1 \text{ iff } \varphi \in \Phi(S_1)$$

これにより，S_1 はクリプキ真理集合であることを示すことができる．故に，Kripke Truth Lemma より，$\Phi(S_1) = S_1$ となる．$\boxtimes$ (1)

逆に，次の条件を充たす (S_1, S_2) を考える．

i) S_1 が $\Phi(S_1) = S_1$ という条件を充たし，（これにより S_1 はクリプキ真理集合となる），
ii) S_2 を $Nsent \cup \{\varphi \in \mathcal{L}_T | \neg\varphi_1 \in S_1\}$ のように定義する．

このとき，$\Lambda(S_1, S_2) = (S_1, S_2)$ となることを示す．

まず $\Lambda(S_1, S_2)$ を (S_1', S_2') とおく．ここから，S_1, S_2 の条件により，$S_1' = S_1$ かつ $S_2' = S_2$ を示せば十分．これを示すために，すべての $\mathcal{L}_T$ 文について，

1. $\varphi \in S_1'$ iff $\varphi \in S_1$，及び　2. $\varphi \in S_2'$ iff $\varphi \in S_2$

を（φ の正の複雑さに関する帰納によって）証明する．（帰納法の詳細は読者に委ねる．）
この議論により，$\Lambda(S_1, S_2) = (S_1, S_2)$ が示される．☒

Kripke-Feferman (KF) の公理系

KF1. $\forall s \forall t(T(\ulcorner s \underset{\cdot}{=} t \urcorner) \leftrightarrow s^\circ = t^\circ)$

KF2. $\forall s \forall t(T(\ulcorner \underset{\cdot}{\neg} s \underset{\cdot}{=} t \urcorner) \leftrightarrow s^\circ \neq t^\circ)$

KF3. $\forall x(Sent_T(x) \rightarrow (T(\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg} x) \leftrightarrow T(x)))$

KF4. $\forall x \forall y(Sent_T(x \underset{\cdot}{\vee} y) \rightarrow (T(x \underset{\cdot}{\vee} y) \leftrightarrow (T(x) \vee T(y))))$

KF5. $\forall x \forall y(Sent_T(x \underset{\cdot}{\vee} y) \rightarrow (T(\underset{\cdot}{\neg}(x \underset{\cdot}{\vee} y)) \leftrightarrow (T(\underset{\cdot}{\neg} x) \wedge T(\underset{\cdot}{\neg} y)))$

KF6. $\forall x(Sent_T(\underset{\cdot}{\exists} vx) \rightarrow (T(\underset{\cdot}{\exists} vx) \leftrightarrow \forall t T x(v/t))$

KF7. $\forall x(Sent_T(\underset{\cdot}{\exists} vx) \rightarrow (T(\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\exists} vx) \leftrightarrow \forall t T(\underset{\cdot}{\neg} x(v/t))$

KF8. $\forall t(T(\underset{\cdot}{T}(t)) \leftrightarrow T(t^\circ))$

KF9. $\forall t(T(\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{T}(t)) \leftrightarrow (T(\underset{\cdot}{\neg} t^\circ) \vee \neg Sent_T(t^\circ))$

公理 CONS

なお，Feferman による公理系には以下に述べる CONS という公理が存在していた.

$$\text{CONS} \qquad \forall x(Sent_T(x) \to \neg(T(x) \land T(\underset{\cdot}{\neg} x)))$$

ここではこれを落とした公理系を KF，CONS を付加した公理化系を KF+CONS と呼ぶ.

KF の十全性（adequacy）

定理

どのような $S \subseteq \omega$ についても，

$(\mathbb{N}, S) \models KF + \forall x(T(x) \rightarrow Sent_T(x))$ iff $\Phi(S) = S$ が成り立つ．

証明）
KF の公理の各々がこのモデルで成り立つことを示す．

KF の十全性の KF + CONS への拡張

Lemma:　KF + CONS $\vdash \forall x(T(x) \rightarrow Sent_T(x))$

証明）KF9 により，$\forall t(\neg Sent_T(t) \rightarrow T(\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{T}(t))$. CONS より，$T(\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{T}(t)) \rightarrow \neg T(\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{T}(t))$. KF3 より，
$T(\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{T}(t)) \rightarrow \neg T(\underset{\cdot}{T}(t))$. KF8 により，さらに，
$T(\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{T}(t)) \rightarrow \neg T(t)$. 従って，$\forall t(\neg Sent_T(t) \rightarrow \neg T(t))$. 故に，$\forall t(T(t) \rightarrow Sent_T(t))$. $\boxtimes$ (lemma)

定理
$S \subseteq \omega$ とする．S が Φ の無矛盾な不動点である（つまり，$S = \Phi(S)$ であり，かつ無矛盾な集合である （$\neg\exists\varphi$, s.t. $Sent_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ かつ $\varphi, \neg\varphi \in S$ ））のは，$(\mathbb{N}, S) \models KF + CONS$ であるとき，かつそのときのみである．

KF + CONS の直観に反する帰結 (1)

命題
$\vdash_{KF} \lambda$ かつ $\vdash_{KF} \neg T(\ulcorner \lambda \urcorner)$.

まず次の lemma を証明する.

lemma
$\vdash_{KF+CONS} \forall \vec{t}(T(\ulcorner \varphi(\vec{t}) \urcorner) \to \varphi(\vec{t}))$

証明）p.c. に基づく帰納法による.

そうすると，次のように議論できる.
$\vdash_{KF}\ T(\ulcorner \lambda \urcorner) \to \lambda$ (上の Lemma)
$\vdash_{KF} \neg T(\ulcorner \lambda \urcorner) \vee \lambda$
$\vdash_{KF} \neg T(\ulcorner \lambda \urcorner) \vee \neg T(\ulcorner \lambda \urcorner)$
$\vdash_{KF} \neg T(\ulcorner \lambda \urcorner)$
故に，$\vdash_{KF} \lambda$.

KF + CONS の直観に反する帰結 (2)

しかし，KF は推論規則 $\dfrac{\vdash_{KF} \varphi}{\vdash_{KF} T(\ulcorner \varphi \urcorner)}$ を持たないので，

$\vdash_{KF} T(\ulcorner \lambda \urcorner)$ は証明されず，形式的な意味での矛盾は導かれない．

とはいえ，ある文とその文が真であるという言明の否定が両方とも証明される形式体系というのは奇妙．

Reinhardt による internal logic / external logic の区別

KF そのものは古典論理に準拠することで，Kripke 真理集合に関する定理の導出を容易にさせる言わば「道具的」な性格を持つ体系（external logic）に過ぎず，Kripke の部分解釈意味論の実質的な内容はむしろ *KF* の internal logic，つまり $\{\varphi \in \mathcal{L}_T | \vdash_{KF} T(\ulcorner \varphi \urcorner)\}$ によって表現される

Halbach & Horsten による Reinhardt への批判

KF の internal logic が KF と独立に特定され，かつ KF がその internal logic のある種の保存的拡張のような性質を充たさない場合には，Reinhardt のいう道具的性格の内容は必ずしも正確に特定できないとして Reinhardt を批判した．

彼らは，実際に，古典論理を経ない，Kripke の意味論的真理論の直接の公理化（PKF）について Halbach & Horsten (2006) で証明論的研究を行い，それが KF の internal logic とは異なる体系であることを示し，KF の internal logic をこの方法で特定することは困難であると主張する．