

数学基礎論サマースクール 2015
証明可能性論理 3
証明可能性論理の発展

倉橋 太志

木更津工業高等専門学校

2015 年 8 月 20 日 (木)

1933 Gödel による, $\Box$ の証明可能性としての解釈

1955 Löb の定理

1976 Solovay の算術的完全性定理

1980 年代 証明可能性論理の分類

1980 年代 様相述語論理への拡張

1988 多様相論理 **GLP** の算術的完全性定理 (Japaridze)

2011 **GLP** の算術的完全性定理の単純な証明 (Beklemishev)

復習

GL の算術的完全性定理

$GL = \{\varphi : \text{任意の変換 } f \text{ について, } PA \vdash f_{PA}(\varphi)\}.$

GL の定理と Γ の元を公理としてもち、推論規則がモダス・ポネンスのみの論理を $GL \cup \Gamma$ とかく.

命題

任意の様相論理式 φ について, $\vdash_{GL \cup \Gamma} \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{GL} \varphi.$

$S = GL \cup \{\Box\varphi \rightarrow \varphi : \varphi \text{ は様相論理式}\}.$

S の算術的完全性定理

$S = \{\varphi : \text{任意の変換 } f \text{ について, } \mathbb{N} \models f_{PA}(\varphi)\}.$

Visser の定理

- ① T の高さは無限 $\Leftrightarrow T$ の証明可能性論理は GL .
- ② T の高さは $n \Leftrightarrow T$ の証明可能性論理は $GL \cup \{\Box^n \perp\}.$

8/20(木)：証明可能性論理の発展

- ① 証明可能性論理の分類
- ② 様相述語論理への拡張
- ③ 多様相論理への拡張

GL と S の算術的完全性定理

- $GL = \{\varphi : \text{任意の変換 } f \text{ について, } PA \vdash f_{PA}(\varphi)\}$
- $S = \{\varphi : \text{任意の変換 } f \text{ について, } \mathbb{N} \models f_{PA}(\varphi)\}$
 $= \{\varphi : \text{任意の変換 } f \text{ について, } TA \vdash f_{PA}(\varphi)\}$

- $GL \neq S$ なので, PA-解釈を考えるときには, PA における証明可能性と, TA における証明可能性では対応する論理が異なる.
- Artemov と Visser はこのことに着目し, 理論 U における理論 T の証明可能性論理という概念を提案した.

証明可能性論理

- T を PA を含む再帰的可算理論, U を任意の理論とする.
 U における T の証明可能性論理 $PL_T(U)$ を

$$PL_T(U) = \{\varphi : \text{任意の変換 } f \text{ について, } U \vdash f_T(\varphi)\}$$

と定める.

- 様相命題論理 L が, ある無矛盾な PA の拡大理論 T, U (ただし T は再帰的可算) について $L = PL_T(U)$ となるとき, L は証明可能性論理であるという.

証明可能性論理の分類

- Solovay の算術的完全性定理より $GL = PL_{PA}(PA)$, $S = PL_{PA}(TA)$ なので, GL と S は証明可能性論理.
 - Visser の定理より $GL \cup \{\Box^n \perp\}$ も証明可能性論理.
-
- 80 年代における大きな研究テーマは, 全ての証明可能性論理を列挙し, そして分類することであった.
 - Artemov, Visser, Japaridze によって研究が進められ, そして Beklemishev(1989) によって証明可能性論理の分類が完了した.
 - ここでは, 証明可能性論理の分類がどのように行われたのかを紹介する.

閉様相論理式

- Visser の定理より $\mathbf{PL}_T(T)$ という形の証明可能性論理は $\mathbf{GL}$ 及び $\mathbf{GL} \cup \{\Box^n \perp\}$ という形の論理で尽くされる.
- ここで $\Box^n \perp$ は命題変数を含まない様相論理式であり, どんな変換 f に対しても $f_T(\Box^n \perp)$ は $\mathbf{Pr}_T^n(\ulcorner \perp \urcorner)$ と結果が一意に定まる.

閉様相論理式

- 命題変数を含まない様相論理式を閉様相論理式という.
- 閉様相論理式 φ に対して $f_T(\varphi)$ は f のとり方に依らず T に対して一意に決まり, その結果の算術の文を φ^T と表す.
- 更に閉様相論理式の集合 Γ について $\Gamma^T = \{\varphi^T : \varphi \in \Gamma\}$ と定める.

例えば $(\neg \Box \perp)^T$ は $\mathbf{Con}_T$.

最初のステップ

1980 年, Artemov は **GL** 無矛盾な閉様相論理式の集合 Γ について, $\mathbf{GL} \cup \Gamma$ が証明可能性論理であることを示した.

定理 (Artemov)

T の高さは無限とし, Γ を閉様相論理式の集合とする.
このとき $\mathbf{GL} \cup \Gamma = \mathbf{PL}_T(T + \Gamma^T)$ である.

証明.

$\vdash_{\mathbf{GL} \cup \Gamma} \varphi$ のとき, $\Gamma \vdash_{\mathbf{GL}} \varphi$ なので, ある有限 $\Delta \subseteq \Gamma$ について $\vdash_{\mathbf{GL}} \bigwedge \Delta \rightarrow \varphi$.
GL の算術的健全性より任意の変換 f について $T \vdash f_T(\bigwedge \Delta) \rightarrow f_T(\varphi)$ なので
 $T + \Delta^T \vdash f_T(\varphi)$, つまり $T + \Gamma^T \vdash f_T(\varphi)$ なので $\varphi \in \mathbf{PL}_T(T + \Gamma^T)$ となる.

一方 $\varphi \in \mathbf{PL}_T(T + \Gamma^T)$ と仮定すると,
一様算術的完全性定理により与えられる変換 f について, $T + \Gamma^T \vdash f_T(\varphi)$.
 $\psi_0, \dots, \psi_{k-1} \in \Gamma$ があって $T \vdash \bigwedge_{i < k} \psi_i^T \rightarrow f_T(\varphi)$ であり,
各 ψ_i は閉様相論理式なので $T \vdash f_T(\bigwedge_{i < k} \psi_i) \rightarrow f_T(\varphi)$ だから,
一様算術的完全性定理より $\vdash_{\mathbf{GL}} \bigwedge_{i < k} \psi_i \rightarrow \varphi$.
つまり $\vdash_{\mathbf{GL} \cup \Gamma} \varphi$ となる.
以上より $\mathbf{GL} \cup \Gamma = \mathbf{PL}_T(T + \Gamma^T)$ がいえた. □

- 有限推移木クリプキフレーム $F = (W, R)$ について, $x_0 R x_1 R \cdots R x_n$ となる $x_0, x_1, \dots, x_n \in W$ がとれるような最大の n を F の高さという.
- 各閉様相論理式 φ が有限推移木クリプキモデルの根において真かどうかは, そのモデルのフレームの高さのみに依存する.
- 例えば閉様相論理式 F_n を $\Box^{n+1} \perp \rightarrow \Box^n \perp$ と定めると, 有限推移木モデルにおいて F_n が根において真であることとそのフレームの高さが n でないことは必要十分.
- そうした性質に注目して, 証明可能性論理の分類において本質的な役割を果たす, 様相論理式のトレースという概念を導入する.

トレース

様相論理式のトレース

様相論理式 φ に対して, そのトレース $\text{tr}(\varphi) \subseteq \omega$ を

$\{n \in \omega : \text{根で } \varphi \text{ が真でないような高さ } n \text{ の有限推移木モデルが存在する} \}$

と定める.

トレースの概念は Artemov の 1980 年の論文において導入された.

- つまり, $n \notin \text{tr}(\varphi)$ ならば, 高さ n の有限推移木モデルの根で必ず φ は真となる.
- 上で述べたことから $\text{tr}(F_n) = \{n\}$ が分かる (F_n は $\Box^{n+1}\perp \rightarrow \Box^n\perp$).
- クリプキ完全性より $\vdash_{\text{GL}} \varphi$ と $\text{tr}(\varphi) = \emptyset$ は同値.
- 任意の様相論理式 φ について, $\text{tr}(\varphi)$ は有限もしくは補有限.

論理 GL_α と GL_β^-

論理のトレース

論理 L に対してそのトレースを $\text{tr}(L) = \bigcup \{\text{tr}(\varphi) : L \vdash \varphi\}$ と定める.

例えば $\text{tr}(GL) = \emptyset$, $\text{tr}(S) = \omega$.

GL_α と GL_β^-

$\alpha, \beta \subseteq \omega$ (β は補有限) について

- $GL_\alpha := GL \cup \{F_n : n \in \alpha\}$.
- $GL_\beta^- := GL \cup \{\neg \bigwedge_{n \notin \beta} F_n\}$.

- このように定めると, $\text{tr}(GL_\alpha) = \alpha$, $\text{tr}(GL_\beta^-) = \beta$ となる.
- $GL_\alpha \subseteq S$ だが, $GL_\beta^- \not\subseteq S$.
- F_n は閉様相論理式なので, Artemov の定理より GL_α や GL_β^- は全て証明可能性論理.

命題

- ① $\alpha \subseteq \alpha' \subseteq \omega$ に対して $GL_\alpha \subseteq GL_{\alpha'}$.
- ② 補有限な $\beta \subseteq \beta' \subseteq \omega$ に対して $GL_\beta^- \subseteq GL_{\beta'}^-$.
- ③ 補有限な $\beta \subseteq \omega$ に対して $GL_\beta \subseteq GL_\beta^-$.

これらの論理は同じトレースをもつ論理の中で次の意味で最も強い論理である.

命題

論理 L について, $\text{tr}(L) = \alpha$ とする.

- ① α が補無限ならば, $L \subseteq GL_\alpha$.
- ② α が補有限ならば, $L \subseteq GL_\alpha^-$.

これは, トレースの定義とクリプキ完全性よりいえる.

トレースによる分類

さてそれではトレースを用いて証明可能性論理を分類しよう。
1984 年, Visser は Solovay 構成法を用いて次を証明した。

定理 (Visser)

論理 L が証明可能性論理であり $\text{tr}(L) = \alpha$ とする。

- ① α が補無限ならば, $L = GL_{\alpha}$.
 - ② $L \not\subseteq S$ ならば, $L = GL_{\alpha}^{-}$.
- この定理により, トレースが補無限である, もしくは S に含まれないような証明可能性論理が GL_{α} 及び GL_{α}^{-} で尽くされることが分かった。
 - あとは $\text{tr}(L)$ が補有限でありかつ $L \subseteq S$ となるような証明可能性論理 L のみを調べれば十分である。

$\text{tr}(\mathbf{L})$ が補有限で $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{S}$ となる証明可能性論理 $\mathbf{L}$

- そのような論理の例としては、補有限な β について $\mathbf{GL}_\beta$ が挙げられる.
- $\mathbf{GL}_\beta = \mathbf{GL}_\omega \cap \mathbf{GL}_\beta^-$ と表せる.

1985 年, Artemov は上記の分析に基づき, 次を証明した.

定理 (Artemov)

$\beta \subseteq \omega$ を補有限とする.

トレースが β でありかつ $\mathbf{S}$ に含まれるような証明可能性論理は,

$\mathbf{GL}_\omega \subseteq \mathbf{L} \subseteq \mathbf{S}$ であるような証明可能性論理 $\mathbf{L}$ について

$\mathbf{L} \cap \mathbf{GL}_\beta^-$ という論理で尽くされる.

よって残すところは $\mathbf{GL}_\omega \subseteq \mathbf{L} \subseteq \mathbf{S}$ となる証明可能性論理 $\mathbf{L}$ を明らかにすることのみである.

$GL_{\omega} \subseteq L \subseteq S$ となる証明可能性論理 L

- $GL_{\omega} \subsetneq L \subsetneq S$ となる証明可能性論理 L はあるのだろうか？
- そのような証明可能性論理の例は Japaridze によって、1986 年に発見された。

様相論理 D

$D := GL \cup \{\neg\Box\perp\} \cup \{\Box(\Box\varphi \vee \Box\psi) \rightarrow (\Box\varphi \vee \Box\psi) : \varphi, \psi \text{ は様相論理式}\}$

定理 (Japaridze)

D は $GL_{\omega} \subsetneq D \subsetneq S$ となる証明可能性論理である。

実際 $D = PL_{PA}(PA + Rfn_{PA}(\Sigma_1))$ となり、証明可能性論理である。

- 最後のステップを進めたのは Beklemishev である.
- 1989 年, Beklemishev によって, $GL_\omega \subsetneq L \subsetneq S$ となる証明可能性論理がこれ以上ないことが示された.

すなわち

定理 (Beklemishev)

証明可能性論理 L が $GL_\omega \subsetneq L \subsetneq S$ を満たすならば, $L = D$ である.

以上で証明可能性論理の全貌が明らかとなった.

分類定理

 D_β と S_β

補有限な $\beta \subseteq \omega$ について $D_\beta := D \cap GL_\beta^-$, $S_\beta := S \cap GL_\beta^-$ と定める.

定理 (分類定理, Beklemishev)

証明可能性論理は $\alpha, \beta \subseteq \omega$ (β は補有限) について GL_α , GL_β^- , D_β , S_β で尽くされる.

TA 上の証明可能性論理は, 分類定理を用いて次のように分類される.

定理 (TA 上の証明可能性論理の分類定理, Beklemishev)

$$PL_T(TA) = \begin{cases} S & T \text{ が健全のとき,} \\ D & T \text{ が健全でないが } \Sigma_1\text{-健全のとき,} \\ GL_\omega & T \text{ が } \Sigma_1\text{-健全でないが高さが無限のとき,} \\ GL\{\neg F_n\} & T \text{ の高さが } n \in \omega \text{ のとき.} \end{cases}$$

8/20(木)：証明可能性論理の発展

- ① 証明可能性論理の分類
- ② 様相述語論理への拡張
- ③ 多様相論理への拡張

述語論理への拡張

- Boolos は 1979 年に出版された本において、証明可能性の様相論理の研究が述語論理に拡張されうると述べた。
 - 証明可能性の様相論理を述語論理において議論することで、 $\text{Pr}_T(x)$ に関する性質をより高い表現力のもとで捉えることができると期待される。
 - その際には、様相命題論理の場合に成立していた結果がどれだけ拡張されうのか、という問題がまずは考えられる。
 - 80 年中頃から後半にかけて、証明可能性の様相述語論理に関する多くの研究が行われた。
 - 証明可能性の様相論理について、述語論理に対して拡張可能な結果、拡張不可能な結果について紹介する。
-
- ここでは簡略化の為に、様相述語論理の言語は関数記号と定数記号を含まないとしておく。
 - GL を様相述語論理に自然に拡張して得られる論理を QGL と書くことにする。

クリプキモデル, クリプキフレーム

様相述語論理に対して, クリプキモデルの概念を次のように定めることができる
(命題論理の場合との本質的な違いは, モデルの各元がドメインをもつことにある)。

クリプキフレーム

次を満たす3つ組 $F = (W, R, \{D_w\}_{w \in W})$ をクリプキフレームという:

- ① W は空でない集合,
- ② R は W 上の2項関係,
- ③ $\{D_w\}_{w \in W}$ は空でない集合の族であり,
 $\forall w, w' \in W (wRw' \Rightarrow D_w \subseteq D_{w'})$ を満たす.

クリプキモデル

次を満たす4つ組 $M = (W, R, \{D_w\}_{w \in W}, \models)$ をクリプキモデルという:

- ① $(W, R, \{D_w\}_{w \in W})$ はクリプキフレーム,
- ② $\models$ は W の元 w と, D_w からパラメータをとった閉様相述語論理式の間の充足関係で, 特に次を満たす.

$$M, w \models \forall x \varphi(x) \Leftrightarrow \text{全ての } k \in D_w \text{ について } M, w \models \varphi(k)$$

妥当性

妥当性

- 様相論理式 φ がクリプキモデル M やフレーム F で妥当であるとは、その全称閉包 $\bar{\varphi}$ がそれぞれで妥当であることをいう。
- 論理 L が M や F で妥当であるとは、 L の公理が全てがそれぞれで妥当であることをいう。
- L を妥当とする任意のクリプキモデルで φ が妥当であることを $L \models_M \varphi$ と表し、 L を妥当とする任意のクリプキフレームで φ が妥当であることを $L \models_F \varphi$ と表す。

命題

クリプキフレーム F について、以下は同値：

- ① QGL は F で妥当。
 - ② F は推移的かつ R -無限上昇列をもたない。
- 特に注意すべきことは $L \models_M \varphi$ と $L \models_F \varphi$ の違いである。
 - $L \models_M \varphi$ ならば $L \models_F \varphi$ が成り立つことは明らか。

クリプキ健全性, 完全性

クリプキ健全性, 完全性

- 任意の論理式 φ について, $L \vdash \varphi$ ならば $L \models_{\mathcal{M}} \varphi$ となるとき, L はクリプキ健全であるという.
- 任意の論理式 φ について, $L \models_{\mathcal{M}} \varphi$ ならば $L \vdash \varphi$ となるとき, L はクリプキモデル完全であるという.
- 任意の論理式 φ について, $L \models_{\mathcal{F}} \varphi$ ならば $L \vdash \varphi$ となるとき, L はクリプキフレーム完全であるという.

命題

推論規則がモダス・ポネンス, 一般化, ネセシテーションのみである様相述語論理 L はクリプキ健全.

つまりそのような論理 L について

$$L \vdash \varphi \Rightarrow L \models_{\mathcal{M}} \varphi \Rightarrow L \models_{\mathcal{F}} \varphi.$$

定理 (Montagna)

QGL はクリプキモデル完全である, つまり $QGL \vdash \varphi \Leftrightarrow QGL \models_{\mathcal{M}} \varphi$.

- 命題論理の場合は、例えば $\mathbf{GL} \not\models \varphi$ という条件から作られる φ の有限反例モデルは $\mathbf{GL}$ を妥当とするフレーム（推移的かつ非反射的）をもつため、 $\mathbf{GL} \models_{\mathcal{F}} \varphi$ ならば $\vdash_{\mathbf{GL}} \varphi$ がいえ、 $\mathbf{GL} \models_{\mathcal{M}} \varphi$ もいえる。
- しかし様相述語論理の場合、後で述べるように特に $\mathbf{QGL}$ についてこのことは成立しない。

Fr(QGL)

$\mathbf{Fr}(\mathbf{QGL}) := \{\varphi : \mathbf{QGL} \models_{\mathcal{F}} \varphi\}$ とする。

- $\mathbf{QGL}$ のクリプキ健全性より $\mathbf{QGL} \subseteq \mathbf{Fr}(\mathbf{QGL})$.
- $\mathbf{QGL}$ がクリプキフレーム完全であるという主張は、 $\mathbf{Fr}(\mathbf{QGL}) \subseteq \mathbf{QGL}$ と書ける。

算術的解釈

次に算術的解釈の概念を述語論理に拡張する。

様相述語論理の言語と算術の言語は等しい変数を用いているとする。

変換, T -解釈

- 関係記号を算術の論理式に写す写像 f で次の性質を満たすものを **変換** という：
関係記号 $P(x_1, \dots, x_n)$ に対して $f(P(x_1, \dots, x_n))$ は P と同じ自由変数をもつ論理式 $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.
このとき $f_T(P(y_1, \dots, y_n))$ は $\varphi(y_1, \dots, y_n)$.
- 各変換 f は命題論理の場合と同様に様相述語論理式を算術の論理式に写す写像 f_T に一意に拡張される。
ただし $f_T(\forall x \varphi(x)) \equiv \forall x f_T(\varphi(x))$.
- $\mathbf{QPL}_T(U) := \{\varphi : \text{任意の変換 } f \text{ について, } U \models f_T(\varphi)\}$.

QGL に対して算術的健全性が成り立つ。

命題 (算術的健全性)

$\mathbf{QGL} \subseteq \mathbf{QPL}_T(U)$.

QGL, Fr(QGL), $\text{QPL}_T(U)$

- $\text{QGL} \subseteq \text{Fr}(\text{QGL})$ かつ $\text{QGL} \subseteq \text{QPL}_T(U)$.
- Solovay の算術的完全性定理の証明は、「 $\varphi \in \text{PL}_T(T)$ ならば、 φ は任意の有限推移木モデルで妥当である」を示すことで行った.

1990 年, Artemov と Japaridze は有限推移木クリプキモデルに対する Solovay の構成法を述語論理に拡張することで次の定理を得た.

定理 (Artemov and Japaridze)

任意の様相述語論理式 φ について,
 $\varphi \in \text{QPL}_{\text{PA}}(\text{PA})$ ならば、 φ は任意の有限推移木フレームにおいて妥当.

Montagna の定理

しかし、命題論理の場合に成り立っていた多くのことが、述語論理の $\mathbf{QGL}$, $\mathbf{Fr}(\mathbf{QGL})$, $\mathbf{QPL}_T(T)$ については成立しない。

定理 (Montagna)

- ① $\mathbf{Fr}(\mathbf{QGL}) \not\subseteq \mathbf{QGL}$, つまり $\mathbf{QGL}$ はクリプキフレーム完全ではない。
- ② $\mathbf{QPL}_{\mathbf{PA}}(\mathbf{PA}) \not\subseteq \mathbf{Fr}(\mathbf{QGL})$, したがって $\mathbf{QPL}_{\mathbf{PA}}(\mathbf{PA}) \not\subseteq \mathbf{QGL}$ となる。
- ③ $\mathbf{QPL}_T(T) \neq \mathbf{QPL}_U(U)$ となる理論 T, U が存在する。

1 より $\mathbf{QGL}$ はクリプキフレームのクラスによって特徴づけることはできない。
また 2 より $\mathbf{QGL}$ に対して $\mathbf{PA}$ の算術的完全性定理は成立しない。
更に次が成り立つ。

定理 (Kurahashi)

- ① T が Σ_1 -健全ならば, $\mathbf{Fr}(\mathbf{QGL}) \not\subseteq \mathbf{QPL}_T(T)$.
- ② $\mathbf{QGL} \subsetneq \mathbf{Fr}(\mathbf{QGL}) \cap \mathbf{QPL}_T(T)$.

Artemov の定理

- それでは, $\text{QPL}_{\text{PA}}(\text{PA})$ や $\text{QPL}_{\text{PA}}(\text{TA})$ を特徴づけるような, 公理系はあるのだろうか?
- 残念ながら答えはやはり否定的である.

まず $\text{QPL}_{\text{PA}}(\text{TA})$ については, Artemov (1985) によって次の定理が示された.

定理 (Artemov)

$\text{QPL}_{\text{PA}}(\text{TA})$ は算術的でない.

- したがって $\text{QPL}_T(\text{TA})$ を特徴づける, 命題論理の場合の $\mathbf{S}$ のような理論は存在しない.
- Artemov の定理は Vardanyan (1986) 及び Boolos and McGee (1987) によって更に詳しく次のように分析されている.

定理 (Vardanyan; Boolos and McGee)

$\text{QPL}_{\text{PA}}(\text{TA})$ は TA 上で Π_1^0 -完全.

Vardanyan の定理

加えて, Vardanyan (1986) によって $\mathbf{QPL}_{\mathbf{PA}}(\mathbf{PA})$ が再帰的に公理化可能でないことも示された.

定理 (Vardanyan)

$\mathbf{QPL}_{\mathbf{PA}}(\mathbf{PA})$ は Π_2^0 -完全.

- 更に Artemov (1986) によって, $\mathbf{QPL}_T(T)$ が理論 T だけでなく, T の可証性述語 $\mathbf{Pr}_T(x)$ の取り方にも依存することが示された.
- これらの結果によって, 様相述語論理における証明可能性論理の研究が命題論理の場合のようには上手く遂行できないことが明らかとなった.
- 一方, $\mathbf{QPL}_T(U)$ が一体どのような集合なのかははっきりとは分かっておらず, 未解決のままの問題も残っている.

8/20(木)：証明可能性論理の発展

- ① 証明可能性論理の分類
- ② 様相述語論理への拡張
- ③ 多様相論理への拡張

多様相論理への拡張

- 証明可能性論理の、様相記号を複数もつ様相論理への拡張はいろいろ行われているがここでは特に Japaridze (1986) による GLP とその算術的完全性について紹介する。
- GLP の算術的完全性の証明は GL のときのようにスムーズにクリプキ意味論を経由することができない。
- Japaridze による算術的完全性の証明をさらに簡単にした Beklemishev (2011) によるアプローチを紹介する。

理論 $T + \text{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N})$ の可証性述語

$\text{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N})$

$\text{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N}) = \{\varphi \in \Pi_n : \mathbb{N} \models \varphi\}$ とする.

- $n \geq 1$ に対して, 任意の Π_n 文 φ に対して $\text{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \text{Sat}_{\Pi_n}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる Π_n 論理式 $\text{Sat}_{\Pi_n}(x)$ が Π_n 論理式でとれることが知られている (Π_n 文に関する真理定義論理式).
- $\text{Sat}_{\Pi_n}(x)$ を用いれば, PA の再帰的可算拡大理論 T に対して, 理論 $T + \text{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N})$ の可証性述語 $\text{Pr}_{T,n}(x)$ がとれる.

可証性述語と書いたが, $\text{Pr}_{T,n}(x)$ は Σ_{n+1} 論理式であり, 任意の論理式 φ について

$$T + \text{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N}) \vdash \varphi \Leftrightarrow \text{PA} + \text{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N}) \vdash \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

となるようなものである.

可導性条件と Löb の定理

$\text{Pr}_{T,n}(x)$ について可導性条件に対応する性質が成り立つ.

定理

D1 $T + \text{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N}) \vdash \varphi$ ならば, $\text{PA} + \text{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N}) \vdash \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner \varphi \urcorner)$

D2 $\text{PA} \vdash \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_{T,n}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner \psi \urcorner))$

D3 $\text{PA} \vdash \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

したがって初回の講義で紹介した証明と同じ方法で, 形式化された Löb の定理に対応する性質が証明できる.

定理

$\text{PA} \vdash \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner \varphi \urcorner).$

$\text{Pr}_{T,n}(x)$ に基づく算術的完全性

ここで、変換 f に対して、 $f_T(\Box\varphi) \equiv \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner f_T(\varphi) \urcorner)$ として定めた算術的解釈を $f_{T,n}$ で表すことにすると、
通常の可証性述語の場合と同様に GL が $f_{T,n}$ に関して算術的完全となる。
すなわち

定理 (Smoryński)

理論 T が健全ならば、任意の様相論理式 φ について以下は同値：

- ① $\vdash_{\text{GL}} \varphi$,
- ② 任意の変換 f について、 $\text{PA} \vdash f_{T,n}(\varphi)$,
- ③ 任意の変換 f について、 $T + \text{Th}_{\Pi_n}(\mathbb{N}) \vdash f_{T,n}(\varphi)$.

$\text{Pr}_{T,m}(x)$ と $\text{Pr}_{T,n}(x)$ の関係

命題

異なる $m, n \in \omega$ ($m < n$) について次が成り立つ：

- ① $\text{PA} \vdash \text{Pr}_{T,m}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner \varphi \urcorner)$
- ② $\text{PA} \vdash \neg \text{Pr}_{T,m}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner \neg \text{Pr}_{T,m}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$

異なる m, n に対する $\text{Pr}_{T,m}(x)$ と $\text{Pr}_{T,n}(x)$ を合わせたこのような性質を取り扱うような様相論理を考えることはできないだろうか。

多様相論理 GLP

多様相論理

- 多様相論理の言語は命題論理の言語に無限個の様相記号 $[0], [1], [2], \dots$ を加えたもの。
- 多様相論理の論理式 φ について, $\langle n \rangle \varphi$ を $\neg[n]\neg\varphi$ の略記とする。

GLP

次の公理と推論規則で与えられる多様相論理を **GLP** という：

- 公理は
 - ① 多様相論理の言語のすべての恒真式
 - ② 全ての n に対して $[n](\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ([n]\varphi \rightarrow [n]\psi)$
 - ③ 全ての n に対して $[n]([n]\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow [n]\varphi$
 - ④ $m < n$ に対して $[m]\varphi \rightarrow [n]\varphi$
 - ⑤ $m < n$ に対して $\langle m \rangle \varphi \rightarrow [n]\langle m \rangle \varphi$
- 推論規則はモダス・ポネンス及びネセシテーション $\frac{\varphi}{[n]\varphi}$ 。

算術的解釈

- 各変換 f を, $f_T([n]\varphi) \equiv \text{Pr}_{T,n}(\ulcorner f_T(\varphi) \urcorner)$ とすることで, 多様相論理式を算術の文に写す写像 f_T (T -解釈) に一意に拡張できる.
- GLP の T -解釈に関する算術的健全性が成り立つことは容易に確認できる.
- 算術的健全性の帰結として, 次のようなことが分かる.

命題

$\nVdash_{\text{GLP}} [1] \perp$.

証明.

$\vdash_{\text{GLP}} [1] \perp$ とすると,
 算術的健全性より, 任意の変換 f について $\text{PA} \vdash f_{\text{PA}}([1] \perp)$,
 すなわち PA において $\text{PA} + \text{Th}_{T,1}(\mathbb{N})$ が矛盾することが証明できる.
 一方 PA は健全なので $\text{PA} + \text{Th}_{T,1}(\mathbb{N})$ は無矛盾であるからおかしい.
 したがって $\nVdash_{\text{GLP}} [1] \perp$ である.



クリプキフレーム, クリプキモデル

GLP の算術的完全性を示すために, **GL** の場合と同様に **GLP** のクリプキ意味論を経由して, 反例モデルに対して **Solovay** 構成法を適用したい.

クリプキフレーム, クリプキモデル

- 多様相論理のクリプキフレームとは $(W; R_0, R_1, \dots)$ で各 R_i が空でない集合 W 上の2項関係であるようなものをいう.
- クリプキモデルはクリプキフレーム上に付値 V を与えたものであるが, 特に各 $[n]$ に対して

$$M, x \models [n]\varphi \Leftrightarrow \forall y \in W (xR_n y \Rightarrow M, y \models \varphi)$$

と定める.

しかし残念ながら次が成り立つ.

命題 (Japaridze)

GLP を特徴付けるようなクリプキフレームのクラスはない.

証明.

$F = (W; R_0, R_1, \dots)$ を, GLP の公理を全て妥当にするクリプキフレームとする.
いま $x \in W$ について xR_1y となる $y \in W$ がとれたとして矛盾を導く.

まず付値 V を $w \in V(p) :\Leftrightarrow xR_0w$ と定めたモデル $M = (W, R, V)$ を考えると,
 xR_0z ならば $M, z \models p$ となるため $M, x \models [0]p$.

GLP の公理 $[0]p \rightarrow [1]p$ は妥当なので $M, x \models [1]p$ だから,
 xR_1y より $M, y \models p$, つまり $y \in V(p)$ となる.
したがって V の定め方より xR_0y である.

付値 V' を $w \in V'(p) :\Leftrightarrow w \neq y$ と定めたモデル $M' = (W, R, V')$ を考えると
 $y \notin V'(p)$, つまり $M', y \not\models p$ なので xR_0y より $M', x \models \langle 0 \rangle \neg p$.

GLP の公理 $\langle 0 \rangle \neg p \rightarrow [1]\langle 0 \rangle \neg p$ が妥当であることから, $M', x \models [1]\langle 0 \rangle \neg p$.
 xR_1y より $M', y \models \langle 0 \rangle \neg p$ となる.

つまりある $z \in W$ があって yR_0z かつ $M', z \not\models p$, つまり $z \in V'(p)$.

ここで V' の定め方より $z = y$ なので yR_0y がいえた.

しかしこれは $[0]([0]p \rightarrow p) \rightarrow [0]p$ が妥当であることに矛盾する.

以上より R_1 が空であることが示せた. よって F において $[1]\perp$ が妥当.

したがって GLP の公理を妥当とするクリプキフレームはまた $[1]\perp$ を妥当とする.

しかし $\not\models_{\text{GLP}} [1]\perp$ なので, GLP を特徴付けるクリプキフレームのクラスは存在しない.



一方, **GLP** の部分論理でクリプキ完全性の成り立つものとれる。

J

GLP の公理 $[m]\varphi \rightarrow [n]\varphi$ を

- ① $[m]\varphi \rightarrow [m][n]\varphi$ と
- ② $[m]\varphi \rightarrow [n][m]\varphi$

で置き換えることで得られる論理を **J** とする。

次で示すように, **J** は **GLP** の部分論理である。

命題

- ① $\vdash_{\text{GLP}} [m]\varphi \rightarrow [m][n]\varphi,$
- ② $\vdash_{\text{GLP}} [m]\varphi \rightarrow [n][m]\varphi.$

証明.

1. $\vdash_{\text{GLP}} [m]\varphi \rightarrow [n]\varphi$ で, ネセシテーションより $\vdash_{\text{GLP}} [m]([m]\varphi \rightarrow [n]\varphi).$
すなわち $\vdash_{\text{GLP}} [m][m]\varphi \rightarrow [m][n]\varphi.$
ここで **GL** の場合と同様に $\vdash_{\text{GLP}} [m]\varphi \rightarrow [m][m]\varphi$ が示せるため,
 $\vdash_{\text{GLP}} [m]\varphi \rightarrow [m][n]\varphi$ がいえる。
2. $\vdash_{\text{GLP}} [m]\varphi \rightarrow [m][m]\varphi$ と公理 $[m][m]\varphi \rightarrow [n][m]\varphi$ を合わせると
 $\vdash_{\text{GLP}} [m]\varphi \rightarrow [n][m]\varphi$ を得る。



J-フレーム

J-フレーム

クリプキフレーム $(W, R_0, R_1, \dots)$ が **J-フレーム** であるとは、次の3条件を満たすことをいう：

- ① 全ての $i \in \omega$ について、 R_i は無限上昇列をもたない。
- ② $m < n$ ならば、任意の $x, y \in W$ について、 $xR_n y$ のとき全ての $z \in W$ について、 $xR_m z$ と $yR_m z$ は同値。
- ③ $m < n$ ならば、任意の $x, y, z \in W$ について、 $xR_m y$ かつ $yR_n z$ ならば $xR_m z$ となる。

クリプキフレーム $(W, R_0, R_1, \dots)$ が有限であるとは、 W が有限集合であり、有限個を除く全ての $i \in \omega$ について $R_i = \emptyset$ となることをいう。
このとき、次が成り立つ。

定理 (Beklemishev)

任意の様相論理式 φ について、以下は同値である：

- ① $\vdash_J \varphi$.
- ② φ は任意の有限な J-フレームで妥当。

- **GL** と **S** の関係を思い出せば, $\mathbf{GL} \subseteq \mathbf{S}$ だが, $\mathbf{S} = \{\varphi : \vdash_{\mathbf{GL}} S(\varphi) \rightarrow \varphi\}$ として **GL** を用いて **S** を定義することができた.
- **J** と **GLP** にも同様の構造が成立する.

- 様相論理式 φ に対して, φ の $[m]\psi$ という形の部分論理式を $[m_0]\varphi_0, [m_1]\varphi_1, \dots, [m_{s-1}]\varphi_{s-1}$ と列挙し, $n = \max\{m_i : i < s\}$ とする.
- $M(\varphi)$ を $\bigwedge_{i < s} \bigwedge_{m_i < j \leq n} ([m_i]\varphi_i \rightarrow [j]\varphi_i)$ と定め, $M^+(\varphi)$ を $M(\varphi) \wedge \bigwedge_{i \leq n} [i]M(\varphi)$ と定める.

$\vdash_{\mathbf{GLP}} M^+(\varphi)$ であることに注意.

GLP の算術的完全性

このとき次の算術的完全性定理が成立する.

定理 (算術的完全性定理, Japridze, Beklemishev)

T を健全とすると, 任意の様相論理式 φ について, 以下は同値である:

- ① $\vdash_J M^+(\varphi) \rightarrow \varphi$.
- ② $\vdash_{\text{GLP}} \varphi$.
- ③ 任意の変換 f について, $T \vdash f_T(\varphi)$.

(1 $\Rightarrow$ 2) 及び (2 $\Rightarrow$ 3) は明らかであり,

(3 $\Rightarrow$ 1) の証明において J のクリプキ完全性と, J -フレームをもつモデルに対する Solovay 構成法を適用すればよい.

今回の講義では紹介しきれなかったたくさん話題がある。

- $\text{Pr}_T(x)$ と $\text{Pr}_U(x)$ を同時に考える場合の様相論理 (Smoryński, Carlson, Visser, Beklemishev)
- ロッサー可証性述語など、標準的でない可証性述語の様相論理 (Guaspari and Solovay, Shavrukov, Visser)
- 限定算術の証明可能性論理 (Berarducci and Verbrugge)
- 解釈可能性の論理 (Visser, Shavrukov, Berarducci)
- 証明の論理 (Artemov)
- GLP の証明論への応用 (Beklemishev)
- 証明可能性論理の位相的, 集合論的意味論 (Blass, Esakia, Beklemishev)

証明可能性論理に関する文献

- 1979 Boolos. *The unprovability of consistency. An essay in modal logic.*
- 1985 Smoryński. *Self-reference and modal logic.*
- 1993 Boolos. *The logic of provability.*
- 1998 Japaridze and de Jongh. The logic of provability.
In *Handbook of Proof Theory.*
- 2005 Artemov and Beklemishev. Provability logic.
In *Handbook of Philosophical Logic, vol.13.*