

数学基礎論サマースクール 2015
証明可能性論理 2
Solovay の算術的完全性定理

倉橋 太志
木更津工業高等専門学校

2015 年 8 月 19 日 (水)

前回の復習

可証性述語

T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ は、任意の論理式 φ に対して

$$T \vdash \varphi \Leftrightarrow \text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$$

となる Σ_1 論理式.

変換, T -解釈

- 各命題変数がある算術の文に写すような写像 f を変換という.
- 各変換 f を, 様相論理式を算術の文に写すような写像 f_T に次のようにして一意に拡張することができる:

- ① 命題変数 p について $f_T(p) \equiv f(p)$
- ② $f_T(\perp) \equiv \perp$
- ③ $f_T(\varphi \rightarrow \psi) \equiv f_T(\varphi) \rightarrow f_T(\psi)$
- ④ $f_T(\Box\varphi) \equiv \text{Pr}_T(\ulcorner f_T(\varphi) \urcorner)$.

このとき f_T を T -解釈と呼ぶ.

定理 (算術的健全性)

φ を様相論理式とする.

$\vdash_{\text{GL}} \varphi$ ならば, 任意の変換 f について $T \vdash f_T(\varphi)$ である.

クリプキモデルについて

GL のクリプキ完全性定理

様相論理式 φ について、以下は同値：

- ① $\vdash_{\text{GL}} \varphi$.
- ② φ は有限推移木フレームをもつ任意のクリプキモデルで妥当.
- ③ φ は有限推移木フレームをもつ任意のクリプキモデルの根において真.

つまり、 $\not\vdash_{\text{GL}} \varphi$ とすれば、

有限推移木フレーム (W, R) をもつクリプキモデル $M = (W, R, V)$ で、その根 r において $M, r \not\models \varphi$ となるものがとれる。

8/19(水) : Solovay の算術的完全性定理

- ① 算術的完全性定理とは
- ② 算術的完全性定理の証明
- ③ 算術的完全性定理の拡張

理論の証明可能性論理

様相論理式 φ が「任意の変換 f について $T \vdash f_T(\varphi)$ 」とは、
 $\Box$ を $\text{Pr}_T(x)$ で解釈したとき、 φ が T において立証可能な原理であることを意味する。

 T の証明可能性論理

$\{\varphi : \text{任意の変換 } f \text{ について } T \vdash f_T(\varphi)\}$ を T の証明可能性論理という。

- T の証明可能性論理とは、 T において立証可能な、 T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に関する性質の集合。
- GL の算術的健全性により、 GL は T の証明可能性論理に含まれる。
- T の証明可能性論理は GL の推論規則で閉じている。

問い

算術的完全性は成立するか？

任意の変換 f について $T \vdash f_T(\varphi)$ ならば、 $\vdash_{\text{GL}} \varphi$ ？

GL は可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の性質を捉えきることが出来ているのか？

つまり、 GL は T の証明可能性論理と一致するのか？

古典命題論理の算術的完全性

古典命題論理 **PC** の算術的完全性は容易に示すことができる。

命題

φ を命題論理の論理式とすると、以下は同値：

- ① $\vdash_{\text{PC}} \varphi$.
- ② 任意の変換 f について、 $T \vdash f_T(\varphi)$.

ただし古典命題論理の論理式には $\Box$ が含まれないので、 T -解釈 f_T の T は役割をもたないことに注意。

証明.

PC の完全性定理より $\vdash_{\text{PC}} \varphi$ であることと φ が恒真式であることは同値。

φ が恒真式ならば $f_T(\varphi)$ もそうなので、 $(1 \Rightarrow 2)$ は明らか。

$(2 \Rightarrow 1)$: 対偶を示す。

φ を恒真式でないとする、 φ を偽とする真理値割り当て V が存在する。

- $V(p) = \text{T}$ のとき $f(p) := \neg \perp$,
- $V(p) = \text{F}$ のとき $f(p) := \perp$

と定めれば $T \vdash \neg f_T(\varphi)$ となるため、 $T \not\vdash f_T(\varphi)$ である。



算術的完全性定理

- 命題の証明 ($2 \Rightarrow 1$) において, φ を偽とする真理値割り当てを用いて $T \vdash \neg f_T(\varphi)$ となる変換 f を容易に定めることができた.
- $\not\models_{\text{GL}} \varphi$ とすれば有限推移木フレームをもつクリプキモデルで, その根において φ が真でないものがとれる.
- しかしそのクリプキモデルを用いて, 変換 f で, $f_T(\Box\psi) \equiv \text{Pr}_T(\ulcorner f_T(\psi) \urcorner)$ としたときに $T \not\models f_T(\varphi)$ となるようなものをどのように定めるのかは明らかではない.

1976 年, Solovay は有限クリプキモデルを算術に埋め込むことで変換 f を定め, GL の算術的完全性定理を証明した.

定理 (GL の算術的完全性定理, Solovay)

T を Σ_1 -健全とする.

任意の様相論理式 φ について, 以下は同値:

- ① $\vdash_{\text{GL}} \varphi$.
- ② 任意の変換 f について $T \vdash f_T(\varphi)$.

算術的完全性定理の応用

算術的完全性定理の応用

- $T \not\models \varphi \wedge \psi \wedge \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \vee \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner)$
となる算術の文 φ と ψ を作りたいとする.
- $T \not\models f_T(p \wedge q \wedge \Box(p \vee q) \rightarrow \Box p \vee \Box q)$ となる変換 f をみつけられればよい.
- 算術的完全性定理より, $\not\models_{\text{GL}} p \wedge q \wedge \Box(p \vee q) \rightarrow \Box p \vee \Box q$ をいえればよい.
- クリプキ完全性定理より, 有限推移木フレームをもつクリプキモデル $M = (W, R, V)$ で, 根 r において $M, r \not\models p \wedge q \wedge \Box(p \vee q) \rightarrow \Box p \vee \Box q$ となるものをみつけられればよい.

つまり, T において何らかの証明可能でない文を作るには, 対応する反例クリプキモデルの存在を示せばよい.

Solovay の構成法

- Solovay の算術的完全性定理の証明に用いられた手法（**Solovay の構成法**）は Solovay の定理の証明以降の証明可能性論理の研究には欠かせないものとなり、Solovay の定理の証明以降その手法を用いて多くの結果が得られることとなった。
- そういった意味で、Solovay の算術的完全性定理はこの分野における一つの礎であるといえる。

Solovay の構成法について詳しく述べ、算術的完全性定理の証明を与える前に、次の例え話について考えてみるとイメージがつきやすくなるだろう。

安住の地を求める

- 地球上のどこかに安住の地を求める日本人 x がいる。
- 地球上の国の数はもちろん有限個であり、各国にはその国から渡航できる国が決まっているとする。
- さて、次のような条件で各国を移動するならば、どのような状況に陥るであろうか。

条件

- ① 既に訪れた国へは二度と戻らない（非反射性）。
- ② A 国から渡航可能な国から渡航可能な国へは、 A 国からでも渡航可能である（推移性）。
- ③ 現在いる国から渡航可能な国へは、「その国が安住の地でないこと」を証明した場合に必ず移動する。

こうした状況から次のことが分かる.

- ① 非反射性と国の数の有限性により, x の安住の地は地球のどこかにちょうど一国ある.
- ② 安住の地が日本でない A 国ならば, 「 A 国が安住の地でないこと」を証明したはず.
- ③ 安住の地が A 国で, B 国が A 国から渡航可能ならば「 B 国が安住の地でないこと」は証明できない.
- ④ x が A 国にいずれ渡るが安住の地が A 国でないなら, 推移性により A 国から渡航可能などこかの国が安住の地である.

安住の地と選んだ場合に x にとって幸せになれる国となれない国が決まっているとし, x は自分が幸せになれることを何とか証明したいとする.

日本でない A 国が安住の地のときを考える。

(a)

A 国から渡航可能な国が全て幸せになれる国だとする。

2 より「 A 国に滞在し続けないこと」を証明したはず。

4 を考えれば「 A 国から渡航可能などこかの国が安住の地である」ことが証明できる。
つまりそのような国は全て幸せになれる国なので、「**幸せになれること**」が証明できる。

(b)

一方、 A 国から渡航可能な国に幸せになれない国 B があるとすると。

x が「幸せになれること」を証明できたとする、「 B 国が安住の地でないこと」が証明できる。

これは3に反するので、この場合「**幸せになれること**」は決して証明できない。

国 A が x の幸せになれる国であることを $A \models H$ と表せば、

A 国から渡航可能な国全てが x の幸せになれる国であることを $A \models \Box H$ と表せる。

- (a) で示したことは、「 $A \models \Box H$ ならば $\text{Pr}(H)$ 」。
- (b) で示したことは、「 $A \models \neg \Box H$ ならば $\neg \text{Pr}(H)$ 」。

渡航可能性に基づく $\Box$ から、上手く証明可能性 $\text{Pr}(H)$ が対応付けられている。

- x が国を移動した際に自分の証明した通りにその国に滞在し続けないようにするとすれば、一度国を移動すれば必ず次の移動をしなくてはならない.
- しかし国の数は有限であるため、結局 x は一度も移動することが出来ない.
- したがってこの場合 x の安住の地は結局は日本である.

Solovay の構成法とは、この例での ‘地球’ が ‘クリプキモデル’ に対応し、各国に関する ‘渡航可能性’ がクリプキフレームの ‘到達可能性’ に対応するような状況を考えることで有限推移木フレームをもつクリプキモデルをある意味で算術の中に埋め込む方法.

8/19(水) : Solovay の算術的完全性定理

- ① 算術的完全性定理とは
- ② 算術的完全性定理の証明
- ③ 算術的完全性定理の拡張

目標

有限推移木クリプキモデルを算術に埋め込む Solovay の構成法について述べ、Solovay の構成法を用いて $\mathbf{GL}$ の算術的完全性定理の証明を行う。

目標 1

T は Σ_1 -健全とする。

$\not\vdash_{\mathbf{GL}} \varphi$ となる φ に対して、 $T \not\vdash f_T(\varphi)$ となる変換 f を作る。

更に、 $\mathbb{N}$ における T の証明可能性について議論した場合に対応する論理 $\mathbf{S}$ の算術的完全性についても紹介する。

目標 2

T は健全とする。

$\vdash_{\mathbf{S}} \varphi \Leftrightarrow$ 任意の変換 f について $\mathbb{N} \models f_T(\varphi)$ 。

Solovay 関数, Solovay 論理式

$M = (W, R, V)$ を有限推移木フレームをもつクリプキモデルとする.

このとき, ある $n \in \omega$ について $W = \{0, 1, \dots, n\}$ であり, 0 は M の根であると仮定してよい.

Solovay 関数, Solovay 論理式

不動点補題を用いて, 原始再帰的関数 $h(x)$ と Σ_2 論理式 $\beta(x)$ で次を満たすものを構成する:

$$h(0) = 0$$

$$h(n+1) = \begin{cases} m & m \in W \text{ かつ } h(n) R m \\ & \text{かつ } n \text{ が } T \text{ における } \neg\beta(\bar{m}) \text{ の証明のとき;} \\ h(n) & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

$$\beta(x) := \exists z \forall y > z (h(y) = x).$$

つまり, $\beta(x)$ は “ x は h の極限である” を意味する論理式.

h と $\beta(x)$ はそれぞれ M の **Solovay 関数**, **Solovay 論理式**と呼ばれる.

- 関数 $h(x)$ は値 $h(0) = 0$ からスタートし, $h(1), h(2), h(3), \dots$ と各値が順番に決められていく.
- $h(0)Rm$ となるある $m \in W$ について文 $\neg\beta(\bar{m})$ の証明が現れるまで h の値は変わらず,
そのような証明 n が現れれば $h(n+1) = m$ となる.
- つまり $h(0)$ から到達可能な m について, 「 h の値が m に留まり続けないこと」の証明が得られた場合に h の値を変化させる.
- この状況はまさに先ほどの“現在いる国から渡航可能な国へは, 「その国が安住の地でないこと」を証明した場合に移動する”という条件に対応している.
- そして $h(n+2)$ 以降の値を, 同様に m から到達可能な値を調べ, 決めていくのである.

そうすれば先ほど調べた例のように次の補題が成り立つ.

補題 1

$\beta(x) \cdots$ “ x は h の極限である”

補題 1

$i, j \leq n$ とする.

- ① $i \neq j$ ならば $\mathbf{PA} \vdash \neg\beta(\bar{i}) \vee \neg\beta(\bar{j})$.
- ② $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{0}) \vee \beta(\bar{1}) \vee \cdots \vee \beta(\bar{n})$.
- ③ iRj ならば $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \neg\mathbf{Pr}_T(\ulcorner\neg\beta(\bar{j})\urcorner)$.
- ④ $i \geq 1$ ならば $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner\neg\beta(\bar{i})\urcorner)$.
- ⑤ $i \geq 1$ ならば $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner\bigvee_{iRj} \beta(\bar{j})\urcorner)$.

補題 1 の証明

補題 1 の 1

$i \neq j$ ならば $\text{PA} \vdash \neg\beta(\bar{i}) \vee \neg\beta(\bar{j})$.

1 の証明

h は原始再帰的なので

$\text{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z (h(x) = y \wedge h(x) = z \rightarrow y = z)$ となるため,

$\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \wedge \beta(\bar{j}) \rightarrow \bar{i} = \bar{j}$ がいえる.

補題 1 の証明

補題 1 の 2

$$\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{0}) \vee \beta(\bar{1}) \vee \cdots \vee \beta(\bar{n}).$$

2 の証明

W の元の高さに関する帰納法で、任意の $i \leq n$ について

$\mathbf{PA} \vdash \exists x h(x) = \bar{i} \rightarrow \beta(\bar{i}) \vee \bigvee_{iRj} \beta(\bar{j})$ を示す。

$i \in W$ を任意に取り iRj となる全ての j について

$$\mathbf{PA} \vdash \exists x h(x) = \bar{j} \rightarrow \beta(\bar{j}) \vee \bigvee_{jRk} \beta(\bar{k})$$

を仮定する。このとき $\mathbf{PA} \vdash \exists x h(x) = \bar{i} \rightarrow \beta(\bar{i}) \vee \bigvee_{iRj} \exists x h(x) = \bar{j}$.

R は推移的なので

$$\mathbf{PA} \vdash \exists x h(x) = \bar{i} \rightarrow \beta(\bar{i}) \vee \bigvee_{iRj} \beta(\bar{j})$$

となることがいえた。したがって、これは W の全ての元に対しても成り立つので、特に $i = 0$ についてもいえる。 $\mathbf{PA} \vdash h(0) = 0$, つまり $\mathbf{PA} \vdash \exists x h(x) = 0$ なので、 $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{0}) \vee \beta(\bar{1}) \vee \cdots \vee \beta(\bar{n})$ がいえた。

補題 1 の証明

補題 1 の 3

iRj ならば $PA \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \beta(\bar{j}) \urcorner)$.

3 の証明

iRj とする. PA において議論する.

i が h の極限であり, かつ T において $\neg \beta(\bar{j})$ が証明可能と仮定する.

全ての $k > m$ について $h(k) = i$ となる数 m をとる.

このとき

$\{p \geq m : iRl \text{ となるある } l \text{ について } p \text{ は } T \text{ における } \neg \beta(\bar{l}) \text{ の証明} \} \neq \emptyset$
 なので, その最小元を q とする.

$q + 1 > m$ なので $h(q + 1) = i$ である.

一方, iRl となるある l について q は $\neg \beta(\bar{l})$ の T における証明なので

h の定義より $h(q + 1) = l$.

$i \neq j$ なので矛盾である.

補題 1 の証明

補題 1 の 4

$i \geq 1$ ならば $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \beta(\bar{i}) \urcorner)$.

4 の証明

$i \geq 1$ とする.

h の定義より, $\text{PA} \vdash \exists x h(x) = \bar{i} \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \beta(\bar{i}) \urcorner)$.

$\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \exists x h(x) = \bar{i}$ なので,

$\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \beta(\bar{i}) \urcorner)$ である.

補題 1 の証明

補題 1 の 5

$i \geq 1$ ならば $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \bigvee_{iRj} \beta(\bar{j}) \urcorner)$.

5 の証明

$i \geq 1$ とする.

2 の証明から, $\mathbf{PA} \vdash \exists x h(x) = \bar{i} \wedge \neg \beta(\bar{i}) \rightarrow \bigvee_{iRj} \beta(\bar{j})$ である.

可導性条件より $\mathbf{PA} \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \exists x h(x) = \bar{i} \wedge \neg \beta(\bar{i}) \urcorner) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \bigvee_{iRj} \beta(\bar{j}) \urcorner)$.

4 より, $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg \beta(\bar{i}) \urcorner)$.

また $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \exists x h(x) = \bar{i}$.

形式化された Σ_1 -完全性より, $\mathbf{PA} \vdash \exists x h(x) = \bar{i} \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \exists x h(x) = \bar{i} \urcorner)$.

これらを合わせれば, $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \exists x h(x) = \bar{i} \wedge \neg \beta(\bar{i}) \urcorner)$.

以上より $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \bigvee_{iRj} \beta(\bar{j}) \urcorner)$.

T が Σ_1 -健全な場合、 $\beta(x)$ の各インスタンスについて次のことが分かる。

補題 2

T を Σ_1 -健全、 $i \leq n$ とする。

- ① $i \geq 1$ ならば $\mathbb{N} \models \neg\beta(\bar{i})$.
- ② $\mathbb{N} \models \beta(0)$.
- ③ $T \not\models \neg\beta(\bar{i})$.

証明.

1. $i \geq 1$ について $\mathbb{N} \models \beta(\bar{i})$ と仮定する。
補題 1 の 4 より $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg\beta(\bar{i}) \urcorner)$ だから、
 $\mathbf{PA}$ の健全性より $\mathbb{N} \models \beta(\bar{i}) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg\beta(\bar{i}) \urcorner)$ 。
仮定より $\mathbb{N} \models \beta(\bar{i})$ なので $\mathbb{N} \models \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg\beta(\bar{i}) \urcorner)$ 、つまり $T \vdash \neg\beta(\bar{i})$ 。
 T は Σ_1 -健全、つまり Π_2 -健全であり、 $\neg\beta(x)$ は Π_2 論理式なので
 $\mathbb{N} \models \neg\beta(\bar{i})$ であるがこれは矛盾。
2. 補題 1 の 2 より $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{0}) \vee \beta(\bar{1}) \vee \dots \vee \beta(\bar{n})$ なのでこの文は $\mathbb{N}$ で真。
1 より $\mathbb{N} \models \neg\beta(\bar{1}) \wedge \dots \wedge \neg\beta(\bar{n})$ なので $\mathbb{N} \models \beta(0)$ 。
3. $i \geq 1$ について、 $0Ri$ なので補題 1 の 3 より $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{0}) \rightarrow \neg\mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg\beta(\bar{i}) \urcorner)$ 。
 $\mathbb{N} \models \beta(\bar{0}) \rightarrow \neg\mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg\beta(\bar{i}) \urcorner)$ であり、2 より $\mathbb{N} \models \beta(\bar{0})$ なので
 $\mathbb{N} \models \neg\mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg\beta(\bar{i}) \urcorner)$ 。
したがって $T \not\models \neg\beta(\bar{i})$ 。



充足可能性の埋め込み

さて、補題 1 を用いて有限クリプキモデル M を算術に埋め込もう。

 M から定められる変換

f を次で定められる変換とする：

$$f(p) := \bigvee_{\substack{i \in W \\ M, i \models p}} \beta(\bar{i}).$$

Solovay の定理の証明において次の補題が本質的である。

補題 3

φ を様相論理式とし、 $i \in W$ を $i \geq 1$ とする。

- ① $M, i \models \varphi \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow f_T(\varphi).$
- ② $M, i \not\models \varphi \Rightarrow \mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \neg f_T(\varphi).$

補題 3 の証明

項目 1 と 2 を φ の構造に関する帰納法で同時に示す.

- 命題変数 p について φ が p のとき.
 1. $M, i \models p$ ならば, $\beta(\bar{i})$ は $f(p)$ の disjunct なので, $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow f(p)$.
 2. $M, i \not\models p$ ならば, $\beta(\bar{i})$ は $f(p)$ の disjunct ではない.
 $f(p)$ の各 disjunct $\beta(\bar{j})$ について, $j \neq i$ なので
補題 1 の 1 より $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \neg\beta(\bar{j})$.
したがって $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \neg f(p)$ である.
- φ が $\perp$ のとき, $M, i \not\models \perp$ かつ $\text{PA} \vdash \neg f_T(\perp)$ である.
- φ が $\psi \rightarrow \gamma$ であり, ψ と γ に主張が成り立つと仮定する.
 1. $M, i \models \psi \rightarrow \gamma$ ならば, $M, i \models \psi$ または $M, i \models \gamma$.
帰納法の仮定より $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \neg f_T(\psi)$ または $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow f_T(\gamma)$.
いずれの場合も $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow (f_T(\psi) \rightarrow f_T(\gamma))$
つまり $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow f_T(\varphi)$.
 2. $M, i \not\models \psi \rightarrow \gamma$ ならば, $M, i \models \psi$ かつ $M, i \not\models \gamma$.
帰納法の仮定より $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow f_T(\psi)$ かつ $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \neg f_T(\gamma)$.
 $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \neg(f_T(\psi) \rightarrow f_T(\gamma))$
つまり $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \neg f_T(\varphi)$.

補題 3 の証明

補題 1

3. iRj ならば $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \beta(\bar{j}) \urcorner)$.
5. $i \geq 1$ ならば $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \bigvee_{iRj} \beta(\bar{j}) \urcorner)$.

- φ が $\Box\psi$ で, ψ について主張が成り立つとする.
 1. $M, i \models \Box\psi$ ならば, iRj となる任意の $j \leq n$ について $M, j \models \psi$.
 帰納法の仮定より, そのような j について $\text{PA} \vdash \beta(\bar{j}) \rightarrow f_T(\psi)$ なので
 $\text{PA} \vdash \bigvee_{iRj} \beta(\bar{j}) \rightarrow f_T(\psi)$.
 可導性条件より $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \bigvee_{iRj} \beta(\bar{j}) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner f_T(\psi) \urcorner)$.
 補題 1 の 5 より, $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \bigvee_{iRj} \beta(\bar{j}) \urcorner)$ だから,
 $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner f_T(\psi) \urcorner)$.
 したがって $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow f_T(\varphi)$ を得る.
 2. $M, i \not\models \Box\psi$ ならば, iRj となるある j について $M, j \not\models \psi$.
 帰納法の仮定より $\text{PA} \vdash \beta(\bar{j}) \rightarrow \neg f_T(\psi)$.
 可導性条件より $\text{PA} \vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \beta(\bar{j}) \urcorner) \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner f_T(\psi) \urcorner)$.
 iRj だから補題 1 の 3 より $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \beta(\bar{j}) \urcorner)$ なので,
 $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner f_T(\psi) \urcorner)$.
 以上より $\text{PA} \vdash \beta(\bar{i}) \rightarrow \neg f_T(\varphi)$ となる.

算術的完全性定理の証明

以上で Solovay の構成法は終了である。

補題 2 と補題 3, **GL** のクリプキ完全性定理を組み合わせることによって **GL** の算術的完全性定理の証明が完了する。

証明.

対偶を示す。 $\not\models_{\mathbf{GL}} \varphi$ と仮定する。

有限推移木フレームをもつクリプキモデル $M' = (W', R', V')$ で、その根において φ が真でないものが存在する。

ある $n \in \omega$ について $W' = \{1, \dots, n\}$ で、1 が M' の根としておく。

ここで $M = (W, R, V)$ を、次のように M' を拡張したモデルとする：

- $W = W' \cup \{0\}$
- $R = R' \cup \{(0, i) : i \in W'\}$
- $i > 0$ について $i \in V(p) \Leftrightarrow i \in V'(p)$,
 $0 \in V(p) \Leftrightarrow 1 \in V'(p)$.

$\beta(x)$ を M の Solovay 論理式とし、 f を $\beta(x)$ と M から定められる変換とする。

$M, 1 \not\models \varphi$ なので補題 3 より $\mathbf{PA} \vdash \beta(\bar{1}) \rightarrow \neg f_T(\varphi)$.

いま $T \vdash f_T(\varphi)$ と仮定すると、

$T \vdash \neg \beta(\bar{1})$ となるため補題 2 の 3 に反する。

したがって $T \not\models f_T(\varphi)$ である。



N における T の証明可能性論理

- これまでは可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に関して T において証明可能な性質に関する論理 GL について議論してきた。
 - Gödel による $\Box$ の解釈は、 $\Box\Box\varphi$ を “ $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ ” と読むものだった。
 - $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner) \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \text{Pr}_T(\ulcorner\text{Pr}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$ であることを思えば、 $\text{Pr}_T(x)$ に関して $\mathbb{N}$ において真である性質について議論していると考えることができる。
 - では集合 $\{\varphi : \text{任意の変換 } f \text{ について } \mathbb{N} \models f_T(\varphi)\}$ はどのようなものだろうか。
 - Solovay はこの集合に対応する論理 $\mathbf{S}$ を定義し、その算術的完全性定理をも証明した。
-
- T が健全であるとする、全ての変換 f について $\mathbb{N} \models f_T(\Box\varphi \rightarrow \varphi)$ が成り立つ。
 - 一方、第二不完全性定理より $\mathbb{N} \not\models f_T(\Box(\Box\perp \rightarrow \perp))$ だから、考えるべき論理体系は GL のようにネセシテーションで閉じているわけではない。

復習

論理式の集合 Γ について、 $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$ とは、
ある有限集合 $\Delta \subseteq \Gamma$ について $\vdash_{\Lambda} \Delta \rightarrow \varphi$ となることであった。

Λ の定理、 Γ の元を公理としてもち、モダス・ポネンスのみを推論規則としてもつ様相命題論理を $\Lambda \cup \Gamma$ とかく。

命題

任意の様相論理式 φ について、 $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi \Leftrightarrow \vdash_{\Lambda \cup \Gamma} \varphi$ 。

証明.

($\Rightarrow$): ある有限 $\Delta \subseteq \Gamma$ について $\vdash_{\Lambda} \Delta \rightarrow \varphi$ とすると、
 $\vdash_{\Lambda \cup \Gamma} \Delta \rightarrow \varphi$ かつ $\vdash_{\Lambda \cup \Gamma} \Delta$ なので $\vdash_{\Lambda \cup \Gamma} \varphi$ 。

($\Leftarrow$): $\Lambda \cup \Gamma$ における φ の証明の長さに関する帰納法で示す。

- $\vdash_{\Lambda} \varphi$ のとき、 $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$ 。
- $\varphi \in \Gamma$ のとき、 $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$ 。
- φ が $\psi \rightarrow \varphi$ と ψ からモダス・ポネンスで導かれたとき、
帰納法の仮定より $\Gamma \vdash_{\Lambda} \psi \rightarrow \varphi$ かつ $\Gamma \vdash_{\Lambda} \psi$ なので $\Gamma \vdash_{\Lambda} \varphi$ 。



様相論理 S

様相命題論理 S を次のように定める。

$S := GL \cup \{\Box\varphi \rightarrow \varphi : \varphi \text{ は様相論理式} \}.$

つまり S は公理として GL の定理及び $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ をもち、その唯一の推論規則はモダス・ポネンスである。

命題 (S の算術的健全性)

$\vdash_S \varphi$ ならば、任意の変換 f について $\mathbb{N} \models f_T(\varphi)$.

このことと GL の算術的完全性定理を用いれば次が得られる。

命題

任意の様相論理式 φ について、 $\vdash_{GL} \varphi$ と $\vdash_S \Box\varphi$ は同値。

証明.

$\vdash_{GL} \varphi$ ならば $\vdash_{GL} \Box\varphi$ なので $\vdash_S \Box\varphi$.

一方 $\vdash_S \Box\varphi$ とすれば、任意の変換 f について $\mathbb{N} \models \text{Pr}_T(\ulcorner f_T(\varphi) \urcorner)$.

つまり $T \vdash f_T(\varphi)$ なので、GL の算術的完全性定理より $\vdash_{GL} \varphi$.



S の算術的完全性定理

一方, **GL** において **S** を特徴付けることができる.

そしてそのアイデアを通じて, **S** の算術的完全性定理を証明できる.

様

相論理式 φ に対して, 様相論理式の集合 $S(\varphi)$ を

$$S(\varphi) := \{\Box\psi \rightarrow \psi : \Box\psi \in \text{Sub}(\varphi)\}$$

と定める.

もちろん $S(\varphi)$ は有限集合である.

定理 (**S** の算術的完全性定理, Solovay)

任意の様相論理式 φ に対して, 以下は同値:

- ① $\vdash_{\text{GL}} \bigwedge S(\varphi) \rightarrow \varphi$.
- ② $\vdash_{\text{S}} \varphi$.
- ③ 任意の変換 f について, $\mathbb{N} \models f_T(\varphi)$.

8/19(水) : Solovay の算術的完全性定理

- ① 算術的完全性定理とは
- ② 算術的完全性定理の証明
- ③ 算術的完全性定理の拡張

Solovay の定理の次の2種類の拡張について紹介する.

- ① Visser による, Σ_1 -健全性でない理論への拡張.
- ② GL の一様算術的完全性, Shavrukov による様相論理式の無限集合への拡張.

理論の高さ

- 算術的完全性定理の証明において、理論 T の Σ_1 -健全性の仮定は $T \not\vdash \neg\beta(\bar{i})$ を示すことのみに用いられた。
- ではこの Σ_1 -健全性の仮定をどこまで弱めることができるのだろうか。
- また、証明可能性論理が **GL** でない理論はあるのだろうか。
- これらの問題には、理論 T の高さという概念を定めることで答えることができる。

$\text{Pr}_T^n(x)$ を $\underbrace{\text{Pr}_T(\text{Pr}_T(\cdots \text{Pr}_T(x) \cdots))}_{n \text{ 個}}$ と定める

理論の高さ

- $T \vdash \text{Pr}_T^n(\ulcorner \perp \urcorner)$ となる $n \in \omega$ があるとき、そのような最小の n を T の高さという。
- そのような n がない場合は T の高さは無限であるとする。

T が Σ_1 -健全ならば全ての $n \in \omega$ に対して $T \not\vdash \text{Pr}_T^n(\ulcorner \perp \urcorner)$ であるから、 T の高さは無限。

一方、高さは無限であるが Σ_1 -健全でないような理論も存在する。

Visser による拡張

1981 年, Visser は T の証明可能性論理が **GL** であることと T の高さが無限であることの同値性を証明した.

更に, 高さが無限でないような理論の証明可能性論理が, その高さによって決まることも示した.

定理 (Visser)

- ① T の高さが無限である $\Leftrightarrow T$ の証明可能性論理は **GL** である.
- ② T の高さが $n \in \omega$ である $\Leftrightarrow T$ の証明可能性論理は **GL** $\cup \{\Box^n \perp\}$ である.

一様算術的完全性定理

続いて、一様算術的完全性定理と Shavrukov の定理について紹介する。

- Solovay の算術的完全性定理の証明の基本的なアイディアは、有限クリプキモデルを算術の中に埋め込むことであった。
- ここで、モデルの有限性は本質ではなく、無限上昇列を持たない推移木フレームを持つ原始再帰的なモデルを埋め込むことができる。
- この考えに基づき、GL の一様算術的完全性定理が得られる。

定理（一様算術的完全性定理, Artemov, Avron, Boolos, Montagna, Visser）

T の高さが無限ならば、ある変換 f が存在して、
任意の様相論理式 φ に対して $\vdash_{GL} \varphi \Leftrightarrow T \vdash f_T(\varphi)$ となる。

証明.

全ての有限推移木モデルを一行に並べ、新たな1つの根 0 を用意し、全ての有限木モデルの根の下に 0 を置くことで得られるモデルは無限上昇列をもたない推移木フレームをもち、特に原始再帰的なので Solovay の構成法が適用でき、変換 f が得られる。

$\not\vdash_{GL} \varphi$ とすると φ の有限反例モデルの根 i において $i \not\models \varphi$ であり、Solovay の定理の証明と同様に $T \not\vdash f_T(\varphi)$ を得る。 □

S について、一様算術的完全性定理は成立するか？

もしある変換 f が存在して、任意の様相論理式 φ に対して

$$\vdash_S \varphi \Leftrightarrow \mathbb{N} \models f_T(\varphi).$$

を満たすとするならば、

$\not\models_S p$ かつ $\not\models_S \neg p$ なので $\mathbb{N} \models \neg f_T(p)$ かつ $\mathbb{N} \models f_T(p)$ となりおかしい。

したがって S に対しては一様算術的完全性定理は成立しない。

一様算術的完全性定理の系として次を得る.

系

T の高さが無限ならば, 任意の様相論理式の集合 Γ について, 以下は同値:

- ① Γ は **GL**-無矛盾 (つまり $\Gamma \not\vdash_{\text{GL}} \perp$).
- ② ある変換 f が存在して, $T + \{f_T(\varphi) : \varphi \in \Gamma\}$ は無矛盾.

証明.

(1 $\Rightarrow$ 2): 対偶を示す.

$\Gamma \vdash_{\text{GL}} \perp$ とすると, 命題よりある有限部分集合 $\Delta \subseteq \Gamma$ が存在して $\vdash_{\text{GL}} \neg \bigwedge \Delta$.

GL の算術的健全性より, 任意の変換 f に対して $T \vdash \neg f_T(\bigwedge \Delta)$.

したがって, $T + \{f_T(\varphi) : \varphi \in \Gamma\}$ が無矛盾となる変換 f は存在しない.

(2 $\Rightarrow$ 1): $\Gamma \not\vdash_{\text{GL}} \perp$ とする.

f を, 一様算術的完全性定理によって得られる変換とする.

このとき, 任意の有限部分集合 $\Delta \subseteq \Gamma$ に対して $\not\vdash_{\text{GL}} \neg \bigwedge \Delta$ であるため,

$T \not\vdash \neg f_T(\bigwedge \Delta)$.

つまり $T + \{f_T(\varphi) : \varphi \in \Delta\}$ は無矛盾.

述語論理のコンパクト性定理より $T + \{f_T(\varphi) : \varphi \in \Gamma\}$ は無矛盾.



また, **GL** はある種の **disjunction property** をもつ.

系

任意の様相論理式 φ, ψ について,
 $\vdash_{\text{GL}} \Box\varphi \vee \Box\psi$ ならば $\vdash_{\text{GL}} \varphi$ もしくは $\vdash_{\text{GL}} \psi$ である.

証明.

$\vdash_{\text{GL}} \Box\varphi \vee \Box\psi$ とする.

f を一様算術的完全性定理により得られる変換とすると,
 算術的健全性より $\text{PA} \vdash \text{Pr}_{\text{PA}}(\ulcorner f_{\text{PA}}(\varphi) \urcorner) \vee \text{Pr}_{\text{PA}}(\ulcorner f_{\text{PA}}(\psi) \urcorner)$.
 PA は健全なので $\mathbb{N} \models \text{Pr}_{\text{PA}}(\ulcorner f_{\text{PA}}(\varphi) \urcorner) \vee \text{Pr}_{\text{PA}}(\ulcorner f_{\text{PA}}(\psi) \urcorner)$,
 つまり $\text{PA} \vdash f_{\text{PA}}(\varphi)$ もしくは $\text{PA} \vdash f_{\text{PA}}(\psi)$.
 一様算術的完全性定理より $\vdash_{\text{GL}} \varphi$ もしくは $\vdash_{\text{GL}} \psi$. □

Strong disjunction property

- ある固定した変換 f について $T \vdash f_T(\varphi)$ となる φ 全体の集合, すなわち $\{\varphi : T \vdash f_T(\varphi)\}$ はどのような集合だろうか.
- 一様算術的完全性定理より, $\{\varphi : T \vdash f_T(\varphi)\} = \mathbf{GL}$ となる変換 f がある.
- まず $\mathbf{GL}$ を含むことは明らかで, $\mathbf{GL}$ の推論規則についても閉じている.
- この問いへの解答は 1993 年に Shavrukov によって与えられた.

様相論理式の集合 Γ に対して, $\mathbf{GL}$ の公理と Γ の元を公理として持ち, 推論規則としてモダス・ポネンスとネセシテーションをもつ論理を $\mathbf{GL}\Gamma$ とかく.

$\mathbf{GL}\Gamma = \mathbf{GL} \cup \{\Box\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ という特徴づけを行うこともできる.

Strong disjunction property

様相論理式の集合 Γ が, 任意の様相論理式 φ, ψ に対して,
 $\vdash_{\mathbf{GL}\Gamma} \Box\varphi \vee \Box\psi$ ならば $\vdash_{\mathbf{GL}\Gamma} \varphi$ または $\vdash_{\mathbf{GL}\Gamma} \psi$
 を満たすとき, Γ は **strong disjunction property (s.d.p.)** をもつという.

例えば, 系より集合 $\emptyset$ は s.d.p. をもつ.

Shavrukov の定理

定理 (Shavrukov)

T が Σ_1 -健全ならば, 任意の様相論理式の再帰的可算集合 Γ に対して, 以下は同値:

- ① Γ は $\not\models_{\text{GL}\Gamma} \perp$ となる集合で, s.d.p. をもつ.
- ② ある変換 f が存在して, 任意の様相論理式 φ について

$$\vdash_{\text{GL}\Gamma} \varphi \Leftrightarrow T \vdash f_T(\varphi)$$

が成り立つ.