

数学基礎論サマースクール 2015
証明可能性論理 1
不完全性定理と証明可能性論理

倉橋 太志

木更津工業高等専門学校

2015 年 8 月 18 日 (火)

はじめに

- 数学における「証明可能性」は、命題の正しさの必然性を与えるという点で、一種の様相概念であると考えることができる。
 - $\Box\varphi$ を「 φ は証明可能である」と解釈する場合に対応するような様相論理の体系とは？
 - $\Box\Box\varphi$ のような式を解釈した「 $\Box\varphi$ が証明可能であること」が証明可能である」という主張に明確な意味を与えなければならない。
 - これは、不完全性定理の証明において Gödel によって構成された，“理論 T の証明可能性を表現する論理式”である可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ を用いることにより可能となる。
-
- 証明可能性論理のテーマは、可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の様相演算子としての振る舞いを調べ、そしてそのことを通じて不完全性定理や形式的証明可能性の理解を深めることである。
 - 特に重要なのが、様相論理 GL が可証性述語の性質を十分に捉えきることができているという、Solovay による算術的完全性定理である。

講義の内容

8/18(火) : 不完全性定理と証明可能性論理

- ① 形式的算術の基本事項
- ② 不完全性定理と Löb の定理
- ③ GL の算術的解釈と不動点定理

8/19(水) : Solovay の算術的完全性定理

- ① 算術的完全性定理とは
- ② 算術的完全性定理の証明
- ③ 算術的完全性定理の拡張

8/20(木) : 証明可能性論理の発展

- ① 証明可能性論理の分類
- ② 様相述語論理への拡張
- ③ 多様相論理への拡張

8/18(火) : 不完全性定理と証明可能性論理

- ① 形式的算術の基本事項
- ② 不完全性定理と Löb の定理
- ③ **GL の算術的解釈と不動点定理**

算術の言語, 数項

算術の言語

$$\mathcal{L}_A = (S, +, \times, 0, \leq)$$

- S は 1 変数関数記号
- $+$, $\times$ は 2 変数関数記号
- 0 は定数記号
- $\leq$ は 2 変数関係記号

- 以降特に断らない限り単に論理式や項といえば $\mathcal{L}_A$ -論理式や $\mathcal{L}_A$ -項のこととする.
- 記号 S は後者関数に対応する記号.
各自然数 n に対してその数項 $\bar{n}$ を $S(S(\cdots S(0)\cdots))$ と定める.

n 個

Δ_0 論理式 Δ_0 論理式

- 変数 x を含まない項 t と論理式 φ に対して,
 $\exists x \leq t \varphi$ と $\forall x \leq t \varphi$ をそれぞれ論理式 $\exists x(x \leq t \wedge \varphi)$ と $\forall x(x \leq t \rightarrow \varphi)$ の略記とする.
- 含まれる量化記号が全てこのような形をしている論理式を Δ_0 論理式という.

$$\exists y \leq x(x = y + y)$$

や

$$x \geq \bar{2} \wedge \forall y \leq x(\exists z \leq x(x = y \times z) \rightarrow y = \bar{1} \vee y = x)$$

は Δ_0 論理式.

算術的階層

形式的算術の理論の研究において、含まれる量化記号の複雑さで論理式を分類することは非常に重要である。

算術的階層

論理式が Σ_n , Π_n であるということを次で再帰的に定める。

- ① φ が Δ_0 論理式するとき, φ を Σ_0 もしくは Π_0 論理式という。
- ② φ がある自然数 k と Π_n 論理式 ψ について $\exists v_0 \dots \exists v_{k-1} \psi$ という形の論理式と論理的に同値であるとき, φ を Σ_{n+1} 論理式という。
- ③ φ がある自然数 k と Σ_n 論理式 ψ について $\forall v_0 \dots \forall v_{k-1} \psi$ という形の論理式と論理的に同値であるとき, φ を Π_{n+1} 論理式という。

- Σ_{n+1} 及び Π_{n+1} 論理式の定義において量化記号のブロックは空でもよく, したがって各 Σ_n もしくは Π_n 論理式は Σ_{n+1} および Π_{n+1} 論理式である。
- 各論理式はある冠頭標準形の論理式と論理的に同値なので, ある n について Σ_n 論理式である。

算術の標準モデル, Γ -健全性標準モデル $\mathbb{N}$, TA

- 領域 $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ をもち, $\mathcal{L}_A$ の記号に通常解釈を与えることで得られる $\mathcal{L}_A$ -構造を算術の**標準モデル**といい $\mathbb{N}$ で表す.
- $\text{TA} := \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\}$ と定め, これを**真の算術 (True Arithmetic)** という.
- 理論 T が**健全**であるとは, $\mathbb{N} \models T$ となることをいう.

形式的算術の理論を扱う際には健全でない理論をも視野に入れたほうがむしろその本質が見えてくる場合があるため, 健全性を弱めた次の概念を定義する.

 Γ -健全性

Γ を論理式のクラスとする.

理論 T が **Γ -健全** であるとは, T において証明可能な Γ 文が全て $\mathbb{N}$ で真であることをいう.

- 今後特に重要となるのは Σ_1 -健全な理論であり, Σ_1 -健全な理論は明らかに無矛盾.
- Σ_n -健全な理論は更に Π_{n+1} -健全であることが知られている.

ロビンソンの算術 Q

本講義で考える形式的算術の理論の土台となるのは、次のロビンソンの算術 Q 及びペアノ算術 (Peano Arithmetic) PA である。

ロビンソンの算術 Q

理論 Q は次の公理からなる：

- $\forall x (\neg 0 = S(x));$
- $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y);$
- $\forall x (\neg x = 0 \rightarrow \exists y (x = S(y)));$
- $\forall x (x + 0 = x);$
- $\forall x \forall y (x + S(y) = S(x + y));$
- $\forall x (x \times 0 = 0);$
- $\forall x \forall y (x \times S(y) = (x \times y) + x);$
- $\forall x \forall y (x \leq y \leftrightarrow \exists z (z + x = y)).$

Q は有限個の公理からなる健全な理論

(本講義では Q についてこれ以上触れないが、黒川さんの講義において登場する)。

ペアノ算術

ペアノ算術 PA

PA は $\mathbf{Q}$ の公理に次の $\mathcal{L}_A$ -論理式に関する数学的帰納法の公理を加えた理論：

- 各論理式 $\varphi(x, \vec{y})$ について

$$\forall \vec{y}(\varphi(0, \vec{y}) \wedge \forall x(\varphi(x, \vec{y}) \rightarrow \varphi(S(x), \vec{y})) \rightarrow \forall x\varphi(x, \vec{y})).$$

- PA は $\mathbf{Q}$ に数学的帰納法の公理として無限個の公理を加えて得られる理論.
- すなわち PA は算術に関する基本的な公理と数学的帰納法公理をもつ健全な理論.

PA の性質として特に重要なのが次の Σ_1 -完全性である.

定理 (Σ_1 -完全性定理)

PA の拡大理論 T は Σ_1 -完全である, つまり T は $\mathbb{N}$ において真である Σ_1 文を全て証明できる.

(実は Σ_1 -完全性定理は $\mathbf{Q}$ の拡大理論に対しても成り立つ.)

Δ_1 論理式 Δ_1 論理式

PA において Σ_1 論理式と Π_1 論理式のどちらとも同値な論理式を Δ_1 論理式という。

$\varphi(x)$ を Δ_1 論理式とすれば, Σ_1 -完全性定理より,

- $\mathbb{N} \models \varphi(\bar{n})$ ならば $\text{PA} \vdash \varphi(\bar{n})$ であり,
- $\mathbb{N} \not\models \varphi(\bar{n})$ ならば $\text{PA} \vdash \neg\varphi(\bar{n})$ である。

- 例えば $\psi(x)$ を $\exists y \leq x (x = y + y)$ (“ x は偶数である” を意味する) とすれば, これは Δ_1 論理式.
 - $\mathbb{N} \models \varphi(\bar{n})$, つまり n が偶数のとき $\text{PA} \vdash \psi(\bar{n})$,
 - $\mathbb{N} \not\models \varphi(\bar{n})$, つまり n が奇数のとき $\text{PA} \vdash \neg\psi(\bar{n})$.
- 偶数全体の集合を PA において論理式 $\psi(x)$ を通じて扱うことができる。

一般に PA は次で定める表現可能性の概念を通じて, 再帰的集合や再帰的関数を扱うことができる。

表現可能性

表現可能性

T を理論, R を ω 上の k 項関係, f を ω 上の k 変数関数とする.

- ① R が T において**表現可能**であるとは, 次の条件を満たす論理式 $\varphi(\vec{x})$ が存在することをいう: 全ての $\vec{n} \in \omega^k$ について,

- ① $\vec{n} \in R$ ならば $T \vdash \varphi(\vec{n})$ であり,
- ② $\vec{n} \notin R$ ならば $T \vdash \neg \varphi(\vec{n})$ である.

- ② R が T において**弱表現可能**であるとは, 全ての $\vec{n} \in \omega^k$ について

$$\vec{n} \in R \Leftrightarrow T \vdash \varphi(\vec{n})$$

の成り立つ論理式 $\varphi(\vec{x})$ が存在することをいう.

- ③ f が T において**表現可能**であるとは, 全ての $\vec{n} \in \omega^k, m \in \omega$ について

$$f(\vec{n}) = m \Leftrightarrow T \vdash \forall y (\varphi(\vec{n}, y) \leftrightarrow y = \bar{m})$$

の成り立つ論理式 $\varphi(\vec{x}, y)$ が存在することをいう.

表現可能性定理

定理（表現可能性定理）

T を $\mathbf{PA}$ の無矛盾な再帰的可算拡大理論, f を ω 上の全域関数, R を ω 上の関係とする.

- ① R は再帰的 $\Leftrightarrow R$ は T において表現可能.
- ② R は再帰的可算 $\Leftrightarrow R$ は T において弱表現可能.
- ③ f は再帰的 $\Leftrightarrow f$ は T において表現可能.

特に表現する論理式を Σ_1 論理式としてとることができる.

原始再帰的関数に対応する関数記号の導入

- n 変数**原始**再帰的関数 f を表現する Σ_1 論理式 $\varphi(\vec{x}, y)$ を $\text{PA} \vdash \forall \vec{x} \exists! y \varphi(\vec{x}, y)$ となるようにとれる.
- 新たな n 変数関数記号 f を用意し, PA に新たな公理 $\forall \vec{x} \varphi(\vec{x}, f(\vec{x}))$ と f を含む数学的帰納法公理を加えた理論を考えても, PA との証明能力や Σ_n や Π_n ($n \geq 1$) の概念に本質的な変化が生じないことが知られている.
- したがってこれ以降, 算術の言語 $\mathcal{L}_A$ は全ての原始再帰的関数に対応する関数記号を含み, PA はそれらの定義公理及びそれらの記号を含む論理式の数学的帰納法公理を含むと仮定して議論する.

Gödel 数

- Gödel による不完全性定理の証明のアイディアの一つに超数学の算術化がある。
- 論理式や証明などの超数学的対象に対して **Gödel 数**と呼ばれる自然数を割り当て、それらに関する性質を Gödel 数を通じて形式的算術において議論するというものである。
- ここではそのような Gödel 数を固定し、論理式 φ の Gödel 数を $\text{gn}(\varphi)$ と表す。
- また $\text{gn}(\varphi)$ の数項 $\overline{\text{gn}(\varphi)}$ を「 φ 」と表す。

(通常、 φ の Gödel 数を「 φ 」と表し、その数項は「 $\overline{\varphi}$ 」とかくが、簡略化のためにここでは上記のように定めた.)

T の定理全体の集合を弱表現する Σ_1 論理式

- 超数学の算術化の手法を用いて, “ y は Gödel 数 x をもつ論理式の T における証明の Gödel 数である” を意味する論理式 $\text{Prf}_T(x, y)$ を書き下す.
- ここで論理式 $\text{Pr}_T(x)$ を Σ_1 論理式 $\exists y \text{Prf}_T(x, y)$ と定めれば, $\text{Pr}_T(x)$ は再帰的可算集合 $\{\text{gn}(\varphi) : T \vdash \varphi\}$ を PA において弱表現する.
- すなわち, $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となる.

可証性述語

このようにして定めた $\text{Pr}_T(x)$ を T の可証性述語という.

可証性述語の性質

T の可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に対して次の性質が成り立つ.

定理 (形式化された演繹定理)

任意の文 φ と ψ について,

$\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \leftrightarrow \text{Pr}_{T+\varphi}(\ulcorner \psi \urcorner)$ が成り立つ.

定理 (Hilbert-Bernays-Löb 可導性条件)

任意の論理式 φ と ψ について, 次が成り立つ:

D1 $T \vdash \varphi$ ならば $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$;

D2 $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \psi \urcorner))$;

D3 $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner)$.

特に **D3** は次の性質の特別な場合である.

定理 (形式化された Σ_1 -完全性)

任意の Σ_1 文 φ について

$\text{PA} \vdash \varphi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ が成り立つ.

無矛盾性を表す文, 反映原理

 T の無矛盾性を表す文

- $\perp$ を, 反証できる単純な Σ_1 文 (例えば $0 = \bar{1}$ や $\exists x(x \neq x)$ など) とし, Con_T を Π_1 文 $\neg \text{Pr}_T(\ulcorner \perp \urcorner)$ と定める.
- このとき Con_T は T の無矛盾性を表す文である.

反映原理

- 論理式のクラス Γ に対して,
 $\text{Rfn}_T(\Gamma) := \{\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi : \varphi \text{ は } \Gamma \text{ 文}\}$ と定め, これを Γ 反映原理という.
 - Γ 反映原理は T の Γ -健全性を表している.
-
- $\perp$ は Σ_1 文なので, $\text{Rfn}_T(\Sigma_1) \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \perp \urcorner) \rightarrow \perp$
つまり $T + \text{Rfn}_T(\Sigma_1) \vdash \text{Con}_T$ である.

8/18(火) : 不完全性定理と証明可能性論理

- ① 形式的算術の基本事項
- ② 不完全性定理と **Löb** の定理
- ③ **GL** の算術的解釈と不動点定理

不完全性定理

以降、 T を PA の再帰的可算な拡大理論とする。
Gödel の不完全性定理を現代的な形で述べる。

第一不完全性定理

T が Σ_1 -健全ならば T は不完全である。

第二不完全性定理

T が無矛盾ならば Con_T は T において証明可能でない。

- これらの不完全性定理の証明と、第二不完全性定理と同等である Löb の定理の証明を与えることが目標である。特に Löb の定理は、証明可能性論理の研究において基本的かつ重要な結果である。
- 不完全性定理の証明は、「この文は偽である」という文の真偽が決定できない、という「嘘つきの逆理」を引用して語られることが多い。
- Gödel は不完全性定理の証明において、嘘つきの逆理における「真偽」を「証明可能性」に置き換えたと思える文を構成した。

不動点補題

そのような文は次の補題から得られる。

不動点補題 (Gödel, Carnap)

任意の論理式 $\varphi(x)$ に対して、ある文 ψ が存在して、 $\mathbf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner)$ となる。
特に、 Γ が Σ_n もしくは Π_n ($n \geq 1$) で $\varphi(x)$ が Γ 論理式のとき、
 ψ は Γ 文としてとれる。

証明.

f を次の原始再帰的関数とする。

$$f(m, n) = \begin{cases} \mathbf{gn}(\psi(\bar{n})) & \text{ある } \psi(v) \text{ について } m = \mathbf{gn}(\psi(v)) \text{ のとき;} \\ 0 & \text{それ以外のとき.} \end{cases}$$

$\delta(x)$ を場合に依じて論理式 $\exists z(f(x, x) = z \wedge \varphi(z))$ もしくは
 $\forall z(f(x, x) = z \rightarrow \varphi(z))$ とし、 e を $\delta(v)$ の Gödel 数とする。

このとき $f(e, e) = \mathbf{gn}(\delta(\bar{e}))$ であるから、
 $\mathbf{PA} \vdash \forall v(f(\bar{e}, \bar{e}) = v \leftrightarrow v = \ulcorner \delta(\bar{e}) \urcorner)$ となる。
つまり $\mathbf{PA} \vdash \delta(\bar{e}) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \delta(\bar{e}) \urcorner)$ を得る。



(実は $\mathbf{Q}$ でも証明できる)

Gödel 文

Π_1 論理式 $\neg \text{Pr}_T(x)$ に対して不動点補題を適用すれば,

$$\text{PA} \vdash \pi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$$

を満たす Π_1 文 π がとれるが, この π は自分自身の証明不可能性を主張する文であると考えられる.

この同値性を T において満たす文, つまり

Gödel 文

$T \vdash \pi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$ 満たす Π_1 文 π を T の Gödel 文という.

- π を T の Gödel 文とし, 例えば φ として $\pi \wedge \bar{n} = \bar{n}$ をとれば, 可導性条件 D1 と D2 により $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner) \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ となるため, φ もまた T の Gödel 文である.
- したがって T の Gödel 文はただ一つとは限らないことに注意.

第一不完全性定理

Σ_1 -健全な理論 T の Gödel 文が全て T において証明も反証もできない、という主張が Gödel の第一不完全性定理である。

定理（第一不完全性定理, Gödel）

π を T の Gödel 文とすると、次が成り立つ：

- ① T が無矛盾ならば、 $T \not\vdash \pi$.
- ② T が Σ_1 -健全ならば、 $T \not\vdash \neg\pi$.

証明.

- ① $T \vdash \pi$ と仮定する.
可導性条件 D1 より $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$, つまり $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$.
 π のとり方より $T \vdash \neg\pi$ となり T の無矛盾性に反する.
したがって $T \not\vdash \pi$.
- ② $T \vdash \neg\pi$ と仮定する. π のとり方より $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$.
 T は Σ_1 -健全なので $\mathbb{N} \models \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$.
したがって $T \vdash \pi$ となり T の無矛盾性に反する.
つまり $T \not\vdash \neg\pi$.



補題 1

- Gödel の第一不完全性定理は **PA** において証明することができる.
- そのこと (第一不完全性定理の形式化) を経て第二不完全性定理が証明できる.
- その前に, 証明不可能性の形式化に関する補題を 2 つ述べる.

補題 1

任意の文 φ に対して

$\text{PA} \vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Con}_T$ が成り立つ.

証明.

$T \vdash \perp \rightarrow \varphi$ なので, D1 と D2 より $\text{PA} \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \perp \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ であり, 対偶をとると $\text{PA} \vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Con}_T$. □

補題 2

補題 2

U を $\mathbf{PA}$ の拡大理論とする.

任意の文 φ に対して, 以下は同値である:

- ① $U \vdash \mathbf{Con}_T \rightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.
- ② $U \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$.

証明.

(1 $\Rightarrow$ 2): $U \vdash \mathbf{Con}_T \rightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ と仮定する.

補題 1 より $\mathbf{PA} \vdash \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner) \rightarrow \mathbf{Con}_T$ なので

$U \vdash \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner) \rightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

対偶をとると $U \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$.

(2 $\Rightarrow$ 1): $U \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$ と仮定する.

$T \vdash (\varphi \wedge \neg \varphi) \rightarrow \perp$ なので, 可導性条件より

$U \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \perp \urcorner)$.

仮定と合わせると $U \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \perp \urcorner)$.

対偶をとると $U \vdash \mathbf{Con}_T \rightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.



第一不完全性定理の形式化

定理 (第一不完全性定理の形式化)

π を T の Gödel 文とすると、次が成り立つ:

- ① $T \vdash \text{Con}_T \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$.
- ② $T + \text{Rfn}_T(\Sigma_1) \vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi \urcorner)$.

証明.

- ① $\neg \pi$ は Σ_1 文なので、形式化された Σ_1 完全性定理より

$$\text{PA} \vdash \neg \pi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi \urcorner).$$

π の定義 より $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner) \rightarrow \neg \pi$ なので,

$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi \urcorner)$ を得る.

補題 2 より $T \vdash \text{Con}_T \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$ となる.

- ② $\neg \pi$ は Σ_1 なので $\text{Rfn}_T(\Sigma_1) \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi \urcorner) \rightarrow \neg \pi$.

π の定義 より $T \vdash \neg \pi \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$ なので

$$T + \text{Rfn}_T(\Sigma_1) \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner).$$

補題 2 より $T + \text{Rfn}_T(\Sigma_1) \vdash \text{Con}_T \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi \urcorner)$.

$T + \text{Rfn}_T(\Sigma_1) \vdash \text{Con}_T$ は既にみたので、 $T + \text{Rfn}_T(\Sigma_1) \vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi \urcorner)$.



第二不完全性定理

命題

π を T の Gödel 文とすると、 $T \vdash \mathbf{Con}_T \leftrightarrow \pi$ が成り立つ。

証明.

補題 1 と第一不完全性定理の形式化より $T \vdash \mathbf{Con}_T \leftrightarrow \neg \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$ となるが、 π の定義より $T \vdash \mathbf{Con}_T \leftrightarrow \pi$ である。□

命題より、 T の Gödel 文は全て T において $\mathbf{Con}_T$ と同値であり、したがって次を得る。

系

T の任意の Gödel 文 π と π' について、 $T \vdash \pi \leftrightarrow \pi'$ が成り立つ。

また命題より $\mathbf{Con}_T$ もまた T の Gödel 文の一つであることが分かる。したがって第一不完全性定理を特に Gödel 文 $\mathbf{Con}_T$ に適用することで Gödel の第二不完全性定理が得られる。

定理 (第二不完全性定理, Gödel)

- ① T が無矛盾ならば $T \not\vdash \mathbf{Con}_T$.
- ② T が Σ_1 -健全ならば $T \not\vdash \neg \mathbf{Con}_T$.

Henkin の問題

- 自分自身の T における証明不可能性を主張している文、つまり T の Gödel 文は T が Σ_1 -健全ならば T から証明も反証もできないことが分かった。
- そこで 1952 年, Henkin は, 自分自身の T における証明可能性を主張する文が T において証明可能であるか, という問題を提起した。
- つまり $T \vdash \varphi \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ を満たす Σ_1 文 φ は T において証明可能なのだろうか。
- 1955 年に Löb は Henkin の Σ_1 文はすべて T において証明可能であるという解答を与えた。

Löb の定理

定理 (Löb の定理)

任意の文 φ に対して、以下は同値：

- ① $T \vdash \varphi$.
- ② $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$.

証明.

(1 $\Rightarrow$ 2) は明らかなので (2 $\Rightarrow$ 1) を示す.

$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ とすると,

$T + \neg \varphi \vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ なので,

可導性条件により $T + \neg \varphi \vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \varphi \rightarrow \perp \urcorner)$.

形式化された演繹定理より $T + \neg \varphi \vdash \neg \text{Pr}_{T+\neg \varphi}(\ulcorner \perp \urcorner)$.

つまり $T + \neg \varphi \vdash \text{Con}_{T+\neg \varphi}$ なので

第二不完全性定理より理論 $T + \neg \varphi$ は矛盾する.

したがって $T \vdash \varphi$ がいえた. □

特に $T \vdash \varphi \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ ならば $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ なので, Löb の定理より $T \vdash \varphi$ となる.

Löb の定理により次が得られる.

系

T を Σ_1 -健全とし, π を T の Gödel 文とすると, 以下が成り立つ:

- ① $T \not\vdash \text{Con}_T \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \text{Con}_T \urcorner)$.
- ② $T \not\vdash \text{Con}_T \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi \urcorner)$.

証明.

- ① 対偶を示す. $T \vdash \text{Con}_T \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \text{Con}_T \urcorner)$ と仮定すると, 対偶を取れば $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \text{Con}_T \urcorner) \rightarrow \neg \text{Con}_T$ であり, Löb の定理より $T \vdash \neg \text{Con}_T$. よって第二不完全性定理より T は Σ_1 -健全でない.
- ② $T \vdash \neg \text{Con}_T \leftrightarrow \neg \pi$ であるから, 可導性条件を用いれば $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \text{Con}_T \urcorner) \leftrightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi \urcorner)$ がいえる. (1) とこの式から $T \not\vdash \text{Con}_T \rightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi \urcorner)$ がいえた.



$T + \text{Rfn}_T(\Sigma_1) \vdash \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \neg \pi \urcorner)$ であったことに注意.

Löb の定理の別証明

先ほどの Löb の定理の証明には第二不完全性定理を用いたが、Löb の行ったもともと
の証明は、不動点補題を用いた次の証明であった。

Löb の定理の別証明.

$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi$ であると仮定する。不動点補題より、

$$\text{PA} \vdash \sigma \leftrightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \rightarrow \varphi)$$

を満たす文 σ がとれる。

σ のとり方より $T \vdash \sigma \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \rightarrow \varphi)$ であり、可導性条件より

$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner)$,

$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner))$, そして

$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$.

したがって仮定より $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \rightarrow \varphi$.

つまり σ のとり方より $T \vdash \sigma$.

可導性条件より $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner)$ なので $T \vdash \varphi$ がいえた。



第二不完全性定理の別証明

- Löb の定理から次のように第二不完全性定理を導くことができる。
- この意味で、Löb の定理は第二不完全性定理と同等であるといわれることがある。

Löb の定理を用いた第二不完全性定理の証明.

対偶を示す. $T \vdash \mathbf{Con}_T$ と仮定すると, $T \vdash \mathbf{Pr}_T(\ulcorner \perp \urcorner) \rightarrow \perp$ なので Löb の定理より $T \vdash \perp$ となる. よって T は矛盾する. □

形式化された Löb の定理

最後に、Löb の定理は形式化することができる。

定理（形式化された Löb の定理）

$$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

証明.

Löb の定理の別証明中の $\text{PA} \vdash \sigma \leftrightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \rightarrow \varphi)$ を満たす文 σ をとり、
証明中の $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ から議論を続ける。

ここから $T \vdash (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi) \rightarrow (\text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner) \rightarrow \varphi)$ が得られるが、

σ の取り方より $T \vdash (\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi) \rightarrow \sigma$ 。

可導性条件より $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \sigma \urcorner)$ なので、

$$T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner).$$


8/18(火)：不完全性定理と証明可能性論理

- ① 形式的算術の基本事項
- ② 不完全性定理と Löb の定理
- ③ **GL の算術的解釈と不動点定理**

Gödel の議論

- 証明可能性を一種の様相概念とする場合に相当する様相論理の体系について考えるための準備が整った。
- いま $\Box$ を健全な理論 T における証明可能性として解釈すれば、式 $\Box\Box\varphi$ は可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ を用いることで、“ $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)$ ” と解釈できるだろう。
- このとき様相命題論理 **S4** の公理 $\Box\varphi \rightarrow \varphi$, $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$, $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ はこの解釈によって妥当な式である。
- 実際 Gödel は 1933 年の論文で、**S4** における $\Box$ を証明可能性と考えることについて触れている。
- 一方 Gödel は $\vdash_{\text{S4}} \Box(\Box\perp \rightarrow \perp)$ であるが、第二不完全性定理により $T \not\vdash \text{Pr}_T(\ulcorner \perp \urcorner) \rightarrow \perp$ であるため、**S4** がこの解釈に関して最適な論理であるとはいえないとも結論付けた。

様相論理 GL

- それではそもそも理論 T は可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ に関してどのような事実を証明できるのだろうか。
- つまり、 $\Box$ を実際の証明可能性として解釈する Gödel による方法とは異なり、 $\Box$ を全て可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ として解釈することで、様相論理を通じて可証性述語の振る舞いを調べることはできないだろうか。
- 可導性条件 D2 により、 $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$ に対応する原理は T において証明可能である。
- 形式化された Löb の定理より $\Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$ も証明可能である。
- 一方 Löb の定理より $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ は必ずしも証明可能であるとはいえない。
- こうした状況を受けて、S4 とは異なる、証明可能性の様相命題論理 GL (Gödel-Löb の論理) が得られる。

GL の公理と推論規則

公理 恒真式, $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$, $\Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$

推論規則 モダス・ポネンス $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$, ネセシテーション $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$

$\vdash_{\text{GL}} \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ となることは佐野さんの講義を参照。

T -解釈

- GL は可証性述語 $\text{Pr}_T(x)$ の振る舞いを調べるために導入された論理である。
- 様相論理と形式的算術を結びつけるために様相論理式の算術的解釈という概念を導入する。

変換, T -解釈

- 各命題変数のある算術の文に写すような写像 f を変換という。
- 各変換 f を, 様相論理式を算術の文に写すような写像 f_T に次のようにして一意に拡張することができる:
 - ① 命題変数 p について $f_T(p) \equiv f(p)$;
 - ② $f_T(\perp) \equiv \perp$;
 - ③ $f_T(\varphi \rightarrow \psi) \equiv f_T(\varphi) \rightarrow f_T(\psi)$;
 - ④ $f_T(\Box\varphi) \equiv \text{Pr}_T(\ulcorner f_T(\varphi) \urcorner)$.

このとき f_T を T -解釈と呼ぶ。

算術的解釈

- 各 T -解釈 f_T について、各様相論理式 φ の f_T に基づく真偽を算術の文 $f_T(\varphi)$ が T において証明可能であるかどうかで決めたと考えれば、これは様相論理の一つの意味論を与えたといえるだろう。
- このようにして与えられる様相論理式の解釈を一般に算術的解釈という。
- 算術的解釈の方法は例えば $f_T(\varphi)$ の $\mathbb{N}$ における真偽を考える場合や、 T とは異なる理論 U での $f_T(\varphi)$ の証明可能性を考える場合など、様々なバリエーションが考えられる。
- そうした問題は後の証明可能性論理の分類の問題につながるが、今日はまずは T における $f_T(\varphi)$ の証明可能性について議論する。

算術的健全性

GL は算術的解釈について健全である。

定理（算術的健全性）

φ を様相論理式とする。

$\vdash_{\text{GL}} \varphi$ ならば、任意の変換 f について $T \vdash f_T(\varphi)$ である。

証明.

GL における φ の証明の長さに関する帰納法で示す。

- φ が GL の公理の場合： φ が恒真式の場合は、 f_T が論理結合子を保存するため $f_T(\varphi)$ も恒真式である。したがって $T \vdash f_T(\varphi)$ である。
 φ が公理 $\Box(\psi \rightarrow \xi) \rightarrow (\Box\psi \rightarrow \Box\xi)$ の場合は可導性条件より。
 φ が公理 $\Box(\Box\psi \rightarrow \psi) \rightarrow \Box\psi$ の場合は形式化された Löb の定理より。
- φ が $\psi \rightarrow \varphi$ と ψ からモダス・ポネンスで導かれたとき、帰納法の仮定より $T \vdash f_T(\psi) \rightarrow f_T(\varphi)$ かつ $T \vdash f_T(\psi)$ なので、 $T \vdash f_T(\varphi)$ である。
- φ が ψ からネセシテーションで導かれたとき、 φ は $\Box\psi$ である。
 帰納法の仮定より $T \vdash f_T(\psi)$ なので可導性条件 D1 より $T \vdash \text{Pr}_T(\ulcorner f_T(\varphi) \urcorner)$
 つまり $T \vdash f_T(\Box\psi)$ なので $T \vdash f_T(\varphi)$ である。



- 様相命題論理 **GL** は不完全性定理に関連する多くの性質を保有している。
- Gödel の不完全性定理の証明における重要なアイディアの一つである不動点補題について、不完全性定理に関わるその本質的な部分を **GL** において導出できる。
- 例えば、既に Con_T が一つの T の Gödel 文であることを示したが、このことは **GL** において証明できる。

命題

$\vdash_{\text{GL}} \neg \Box \perp \leftrightarrow \neg \Box \neg \Box \perp$.

証明.

両辺の否定をとった $\vdash_{\text{GL}} \Box \perp \leftrightarrow \Box \neg \Box \perp$ を示す。

$\vdash_{\text{GL}} \Box \perp \rightarrow \Box \neg \Box \perp$ は $\vdash_K \perp \rightarrow \neg \Box \perp$ より明らか。

$\vdash_K \neg \Box \perp \rightarrow \neg \Box \perp$ より $\vdash_K \neg \Box \perp \rightarrow (\Box \perp \rightarrow \perp)$ なので

$\vdash_K \Box \neg \Box \perp \rightarrow \Box (\Box \perp \rightarrow \perp)$ となり、 $\vdash_{\text{GL}} \Box \neg \Box \perp \rightarrow \Box \perp$ がいえる。



GL における不動点

- 様相論理式 φ に含まれる命題変数 p を全て様相論理式 ψ で置き換えて得られる様相論理式を $\varphi_p(\psi)$ で表すとする、命題は

$$\vdash_{GL} \neg \Box \perp \leftrightarrow (\neg \Box p)_p(\neg \Box \perp)$$

と書くことができ、つまり $\neg \Box \perp$ が $\neg \Box p$ の不動点であることを述べている.

- 一方、 $\neg p$ は不動点をもち得ない.
- なぜなら、 $\vdash_{GL} \varphi \leftrightarrow (\neg p)_p(\varphi)$ は $\vdash_{GL} \varphi \leftrightarrow \neg \varphi$ を意味するからである.
- したがって全ての様相論理式が不動点を持つわけではない.

箱入り

- 振り返ってみれば、例えば Gödel 文は $T \vdash \pi \leftrightarrow \neg \text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$ を満たす π として定められた。
- $\text{Pr}_T(\ulcorner \pi \urcorner)$ の中において π はあくまで Gödel 数として現れているだけである。

この状況から、次の定義が得られる。

定義 (箱入り)

命題変数 p が様相論理式 φ において箱入りであるとは、 φ に含まれる p が全て $\Box$ の中に入っていることをいう。

例えば命題変数 p は $\Box(\Box p \rightarrow p)$ において箱入りであるが、 $\Box p \rightarrow p$ において右の p が $\Box$ の中に入っていないため箱入りでない。

不動点定理

GL における不動点定理は、 p が φ において箱入りであるような全ての φ に対して、 φ の p に関する不動点が取れることを主張する。

様相論理式 φ に現れる命題変数全体の集合を $\text{At}(\varphi)$ とかくとする。

定理（不動点定理, de Jongh, Sambin）

φ を様相論理式、 p を命題変数とする。

p が φ において箱入りであるならば、

$\text{At}(\psi) \subseteq (\text{At}(\varphi) \setminus \{p\})$ である様相論理式 ψ が存在して、

$$\vdash_{\text{GL}} \psi \leftrightarrow \varphi_p(\psi)$$

が成り立つ。

例えば不動点定理により得られる $\Box p \rightarrow q$ の不動点は $\Box q \rightarrow q$ であり、

$\Box(\Box(p \wedge q) \wedge \Box(p \wedge r))$ の不動点は $\Box(\Box q \wedge \Box r)$ である。

不動点の一意性

- Gödel 文に関する例について考えると、 T の任意の Gödel 文は全て T において互いに同値であった。
- GL においても不動点の一意性が示せる。

定理（不動点の一意性, Bernardi, Sambin, de Jongh）

φ を様相論理式, p, q を命題変数とする。

p が φ において箱入りでありかつ $q \notin \text{At}(\varphi)$ ならば,

$$\vdash_{\text{GL}} \Box(p \leftrightarrow \varphi) \wedge \Box(q \leftrightarrow \varphi_p(q)) \rightarrow \Box(p \leftrightarrow q)$$

が成り立つ。