

数学基礎論サマースクール

非古典論理

2015年8月18日～21日
神戸大学

菊池 誠（神戸大）

歴史：これまでのテーマ

- 2015年：非古典論理（神戸）
- 2014年：集合論（神戸）
- 2013年：証明論
- 2012年：計算可能性とランダムネス
- 2011年：モデル理論（神戸）
- 2010年：超準解析の基礎と応用
- 2009年：非古典論理の代数的セマンティクス
- 2008年（Asian Logic Conference 開催, 神戸）
- 2007年：集合論のブール値モデルと強制法
- 2006年：証明論
- 2005年：モデル理論
- 2004年：計算量
- 2003年：非古典論理

古典論理

言語

- 命題結合子： $\wedge$ かつ, $\vee$ または, $\neg$ 否定, $\rightarrow$ ならば
- 量化子： $\forall$ すべて, $\exists$ 存在

論理体系

- 論理的公理： $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ など
- 推論規則：
$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q}$$
 (モダスポーネンス) など

完全性定理：以下は同値

- $T \vdash p$ (p は T と論理的公理から推論規則で導出可能)
- $T \models p$ (M が T のモデルならば $M \models p$)

注意

完全性定理によって論理体系が正当化される.

恒真式は全て証明できる. **古典論理は最も強い論理.**

非古典論理

論理体系を弱める

- 直観主義論理：排中律 ($p \vee \neg p$) は証明できない.
- 量子論理：分配律は証明できない.
- 部分構造論理： $p \wedge p$ と p は違う.
- 線形論理：二種類の「かつ」，二種類の「または」...
- 矛盾許容型論理：矛盾から全ては証明できない.

言語を拡張する

- 様相論理：様相演算子 $\Box$ (box), $\Diamond$ (diamond) を追加.

注意

- 様相演算子： p が命題ならば $\Box p$, $\Diamond p$ も命題.
 - $\Box p$: p は必然的に正しい.
 - $\Diamond p$: p は可能
- 様相演算子は重複可能. $\Diamond \Box p$ など命題.

様相論理

□と◇の関係

- $\Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p$ ($\exists x p \leftrightarrow \neg \forall x \neg p$ と似ている)
- $\Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$ ($\forall x p \leftrightarrow \neg \exists x \neg p$ と似ている)

問題

□ や ◇ はどのような性質を満たすか？

種々の様相論理

□p の読み方に応じて、様々な様相論理がある.

- 義務論理：p しなければならない.
- 認識論理：p を知っている.
- 信念論理：p を信じている.
- 時制論理：どのような未来でも p が成り立つ.
- 証明可能性論理：p は証明可能.

□ や ◇ はどのような性質を満たすかは、□p の読み方次第.

様相論理の体系

体系 K：様相論理の基本

- 全ての恒真式は公理
- 公理 K： $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
- モダスポーネンス
- 必然化則：
$$\frac{p}{\Box p}$$

注意

必然化則から $p \rightarrow \Box p$ は導かれない.

その他の公理の例

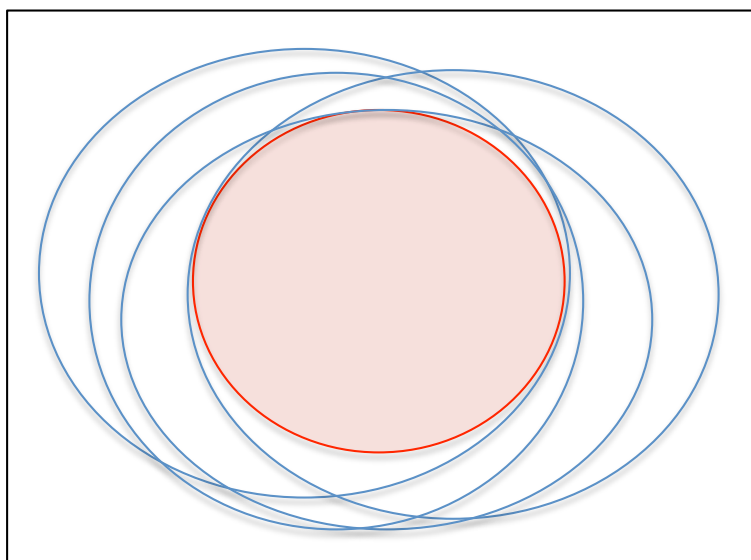
- 公理 T： $\Box p \rightarrow p$
- 公理 4： $\Box p \rightarrow \Box \Box p$
- 公理 5： $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$
- 公理 .2： $\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$

非古典論理の意味論

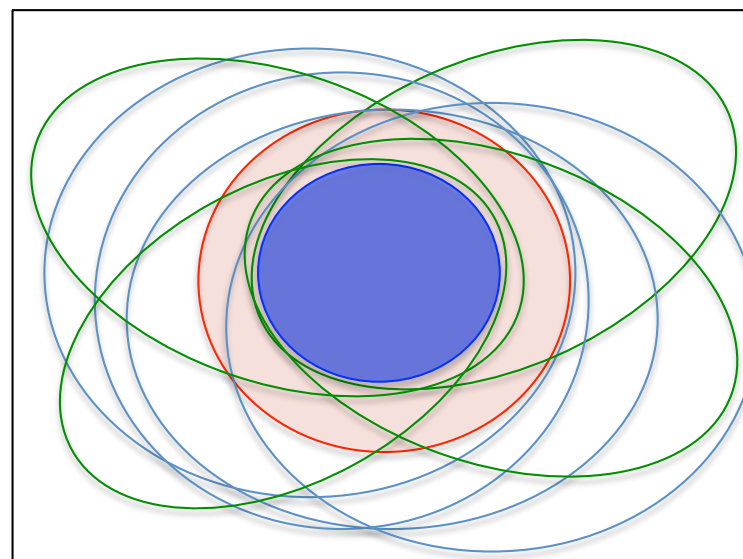
完全性定理 (再掲)

$T \vdash p$ と $T \models p$ の同値性で論理体系が正当化される.

非古典論理の意味論 : 論理は弱い. モデルを増やす.



古典論理



非古典論理

注意 : モデルを減らすと論理は強くなる

- 非単調論理 (McCarthy の Circumscription, 人工知能)
- Ω 論理 (Woodin, 集合論)

代数的意味論

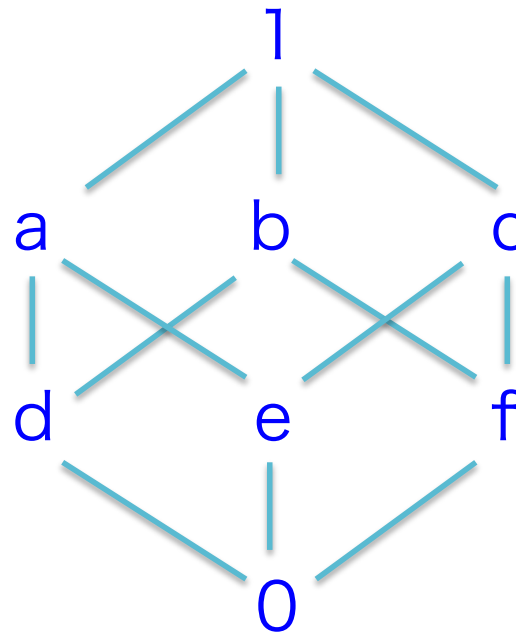
真理値を増やす：代数的意味論

2値論理から多値論理へ.

- $\{0, 1\}$ (または $\{\text{偽}, \text{真}\}$) から完備ブール代数へ.
- 完備ブール代数から完備ハイティング代数へ.



単純な真理値

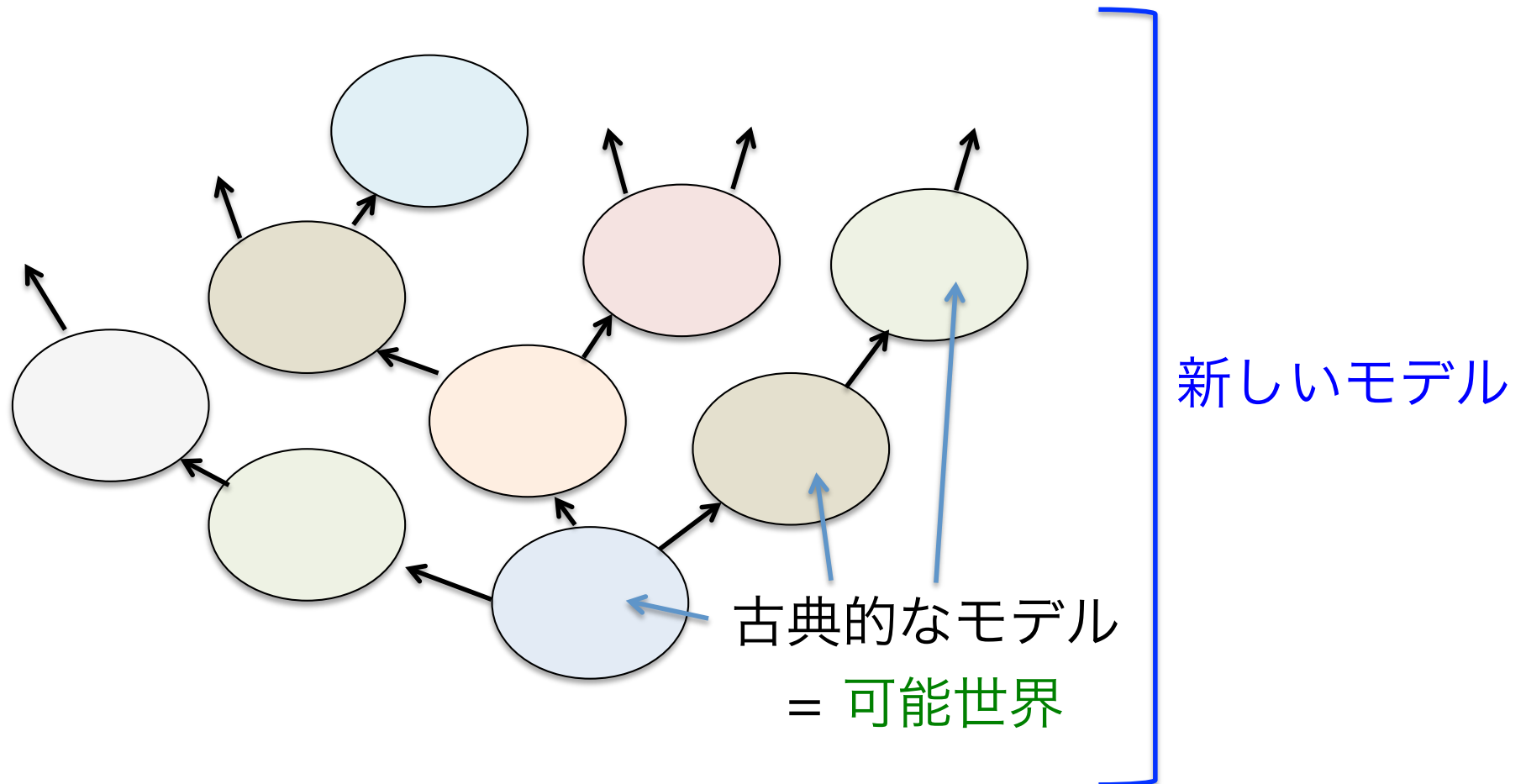


複雑な真理値

可能世界意味論

モデルをつなげる：可能世界（クリプキ）意味論

古典論理のモデルをつなげる.



証明と真理

数学を展開するための公理系

- PA : Peano 算術
- ZF : Zermelo-Fraenkel 集合論

第一不完全性定理

T を PA や ZF のような公理系とする.

$T \vdash p$ でも, $T \vdash \neg p$ でもない算術の命題 p が存在.

教訓

「証明可能性」と「正しさ」は違う.

今回のサマースクールの主題

「 p は証明可能」 「 p は正しい」を $\Box p$ と書く.

- この $\Box p$ が満たすべき条件は何か？
- 古典論理的な非古典論理 / 非古典的な非古典論理

プログラム

講義

「証明と真理」に関わる様相論理

- 様相論理入門（佐野）
- 証明可能性論理（倉橋） ゲーデルの不完全性定理
- 強制法と様相論理（薄葉） 集合論の真理
- 真理と様相（黒川） タルスキ, クリプキ, その他

特論

「外の世界」とのつながり

- 認識論理のゲーム論的意思決定への応用（金子） 経済学
- 計算機科学と様相論理（佐藤） 計算機科学
- 集合論的多元宇宙と様相論理（渕野） 公理的集合論

告知

講義録等

- 発表スライドの一部はHPに掲載.
- 講義録は来年3月に出版予定.
「様相論理による数学基礎論入門」
乞うご期待.

セミナーのお知らせ

- 8月21日（金）午後4時から
- 自然科学総合研究棟4階421室
- 講演者：Arkady Leiberman
- 題目：Open G-bases and compact resolutions in topological groups and locally convex spaces