

量化記号消去と数論

桔梗 宏孝

神戸大学大学院システム情報学研究科

2011 年 8 月 29, 30 日 数学基礎論サマースクール

- 1 量化記号消去の定義
- 2 量化記号消去の証明法: 直接証明
- 3 量化記号消去可能性の判定条件
- 4 Poincaré級数に関する問題
- 5 p 進積分
- 6 Pas の量化記号消去
- 7 ACVF の量化記号消去
- 8 ACFA

例：実数体 (順序閉体), 代数的閉体

$\varphi(a, b, c) \equiv \exists x (ax^2 + bx + c = 0)$ を考える.

例：実数体 (順序閉体), 代数的閉体

$\varphi(a, b, c) \equiv \exists x (ax^2 + bx + c = 0)$ を考える.

$$\mathbb{R} \models \varphi(a, b, c) \leftrightarrow (a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0) \vee (a = 0 \wedge (b \neq 0 \vee c = 0))$$

例：実数体 (順序閉体), 代数的閉体

$\varphi(a, b, c) \equiv \exists x (ax^2 + bx + c = 0)$ を考える.

$$\mathbb{R} \models \varphi(a, b, c) \leftrightarrow (a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0) \vee (a = 0 \wedge (b \neq 0 \vee c = 0))$$

$$\mathbb{C} \models \varphi(a, b, c) \leftrightarrow (a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c = 0)$$

例：実数体 (順序閉体), 代数的閉体

$\varphi(a, b, c) \equiv \exists x (ax^2 + bx + c = 0)$ を考える.

$$\mathbb{R} \models \varphi(a, b, c) \leftrightarrow (a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0) \vee (a = 0 \wedge (b \neq 0 \vee c = 0))$$

$$\mathbb{C} \models \varphi(a, b, c) \leftrightarrow (a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c = 0)$$

$\exists$ (存在記号) と $\forall$ (任意記号) をあわせて**量化記号** (quantifier) と呼ぶ.

上の例では存在条件を $\exists$ や $\forall$ を使わない形に同値変形している. この変形を**量化記号消去** (quantifier elimination) と呼ぶ.

$\forall$ や $\exists$ を含まない論理式を **qf 論理式** と呼ぶ. (qf は quantifier-free)

φ が $\mathcal{L}$ の qf 論理式であることを $\varphi \in \mathcal{L}^{\text{qf}}$ と書く.

T を言語 $\mathcal{L}$ をもつ公理系 (理論) とする. 自由変数 $x = (x_1, \dots, x_n)$ ($n \geq 1$) をもつ $\mathcal{L}$ の任意の論理式 $\varphi(x)$ に対し, 同じ自由変数をもつ $\mathcal{L}$ の qf 論理式 $\psi(x)$ が存在して,

$$T \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$$

となるとき, T は $\mathcal{L}$ で**量化記号消去が可能 (QE 可能)** であるという.

T を言語 $\mathcal{L}$ をもつ公理系 (理論) とする. 自由変数 $x = (x_1, \dots, x_n)$ ($n \geq 1$) をもつ $\mathcal{L}$ の任意の論理式 $\varphi(x)$ に対し, 同じ自由変数をもつ $\mathcal{L}$ の qf 論理式 $\psi(x)$ が存在して,

$$T \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$$

となるとき, T は $\mathcal{L}$ で**量化記号消去が可能 (QE 可能)** であるという.

$\text{Th}(\mathbb{R})$ は言語 $\{+, -, \cdot, 0, 1, <\}$ で QE 可能.

T を言語 $\mathcal{L}$ をもつ公理系 (理論) とする. 自由変数 $x = (x_1, \dots, x_n)$ ($n \geq 1$) をもつ $\mathcal{L}$ の任意の論理式 $\varphi(x)$ に対し, 同じ自由変数をもつ $\mathcal{L}$ の qf 論理式 $\psi(x)$ が存在して,

$$T \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$$

となるとき, T は $\mathcal{L}$ で**量化記号消去が可能 (QE 可能)** であるという.

$\text{Th}(\mathbb{R})$ は言語 $\{+, -, \cdot, 0, 1, <\}$ で QE 可能.

代数的閉体の公理系は言語 $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ で QE 可能.

例 1. 端点のない稠密全順序の公理系は $\{<\}$ で QE 可能.

例 1. 端点のない稠密全順序の公理系は $\{<\}$ で QE 可能.

原始式 (primitive formula) の存在がはずせればよい. この例では正原子式 (positive primitive formula) だけ考えればよい.

$$\begin{aligned} \exists u (x_1 < u \wedge \cdots \wedge x_l < u \wedge \\ u = y_1 \wedge \cdots \wedge u = y_m \wedge \\ u < z_1 \wedge \cdots \wedge u < z_n) \end{aligned}$$

この $\exists u$ の消去は容易.

例 1. 端点のない稠密全順序の公理系は $\{<\}$ で QE 可能.

原始式 (primitive formula) の存在がはずせればよい. この例では正原子式 (positive primitive formula) だけ考えればよい.

$$\begin{aligned}\exists u (x_1 < u \wedge \cdots \wedge x_l < u \wedge \\ u = y_1 \wedge \cdots \wedge u = y_m \wedge \\ u < z_1 \wedge \cdots \wedge u < z_n)\end{aligned}$$

この $\exists u$ の消去は容易.

一般には, 論理積成分に原子式の否定も必要.

今の場合,

$$x \neq y \leftrightarrow (x < y \vee y < x)$$

$$x \not< y \leftrightarrow (x > y \vee x = y)$$

なので必要ない.

定理 1

$\varphi(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 1$) を言語 $\mathcal{L}$ の論理式とすると次の 2 つは同値:

(1) ある qf 論理式 $\psi(x)$ が存在して $T \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$

(2) $M, N \models T, A \subset M, A \subset N$ のとき,
任意の $a \in A^n$ に対し, $M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(a)$.

定理 1

$\varphi(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 1$) を言語 $\mathcal{L}$ の論理式とすると次の 2 つは同値:

(1) ある qf 論理式 $\psi(x)$ が存在して $T \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$

(2) $M, N \models T, A \subset M, A \subset N$ のとき,
任意の $a \in A^n$ に対し, $M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(a)$.

難しいのは (2) $\Rightarrow$ (1) の方である. さらに, $\varphi(x)$ と $\neg\varphi(x)$ の両方とも T のモデルで解をもつ可能性がある場合が本質的.

定理 1

$\varphi(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 1$) を言語 $\mathcal{L}$ の論理式とすると次の 2 つは同値:

(1) ある qf 論理式 $\psi(x)$ が存在して $T \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$

(2) $M, N \models T, A \subset M, A \subset N$ のとき,
任意の $a \in A^n$ に対し, $M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(a)$.

難しいのは (2) $\Rightarrow$ (1) の方である. さらに, $\varphi(x)$ と $\neg\varphi(x)$ の両方とも T のモデルで解をもつ可能性がある場合が本質的.

$\Gamma(x) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid T \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x)\}$ とする.
(qf 論理式で外側から近似)

定理 1

$\varphi(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 1$) を言語 $\mathcal{L}$ の論理式とすると次の 2 つは同値:

(1) ある qf 論理式 $\psi(x)$ が存在して $T \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$

(2) $M, N \models T, A \subset M, A \subset N$ のとき,
任意の $a \in A^n$ に対し, $M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(a)$.

難しいのは (2) $\Rightarrow$ (1) の方である. さらに, $\varphi(x)$ と $\neg\varphi(x)$ の両方とも T のモデルで解をもつ可能性がある場合が本質的.

$\Gamma(x) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid T \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x)\}$ とする.
(qf 論理式で外側から近似)

主張. $T \cup \Gamma(x) \vdash \varphi(x)$.

主張. $\Gamma(x) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid T \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x)\} \Rightarrow T \cup \Gamma(x) \vdash \varphi(x).$

主張. $\Gamma(x) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid T \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x)\} \Rightarrow T \cup \Gamma(x) \vdash \varphi(x).$

そうでないと, $M \models T \cup \Gamma(d) \cup \{\neg\varphi(d)\}$ となる M と $d \in M^n$ がある.

主張. $\Gamma(x) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid T \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x)\} \Rightarrow T \cup \Gamma(x) \vdash \varphi(x).$

そうでないと, $M \models T \cup \Gamma(d) \cup \{\neg\varphi(d)\}$ となる M と $d \in M^n$ がある.

そこで,

$$\text{qftp}_M(d) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid M \models \psi(d)\}$$

として

$$T \cup \text{qftp}_M(d) \cup \{\varphi(x)\}$$

を考えると, これも整合的になる (演習問題).

主張. $\Gamma(x) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid T \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x)\} \Rightarrow T \cup \Gamma(x) \vdash \varphi(x).$

そうでないと, $M \models T \cup \Gamma(d) \cup \{\neg\varphi(d)\}$ となる M と $d \in M^n$ がある.
そこで,

$$\text{qftp}_M(d) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid M \models \psi(d)\}$$

として

$$T \cup \text{qftp}_M(d) \cup \{\varphi(x)\}$$

を考えると, これも整合的になる (演習問題).

$$N \models T, \text{qftp}_N(d') = \text{qftp}_M(d), N \models \varphi(d')$$

となる N と $d' \in N^n$ をとる.

主張. $\Gamma(x) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid T \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x)\} \Rightarrow T \cup \Gamma(x) \vdash \varphi(x).$

そうでないと, $M \models T \cup \Gamma(d) \cup \{\neg\varphi(d)\}$ となる M と $d \in M^n$ がある.
そこで,

$$\text{qftp}_M(d) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid M \models \psi(d)\}$$

として

$$T \cup \text{qftp}_M(d) \cup \{\varphi(x)\}$$

を考えると, これも整合的になる (演習問題).

$$N \models T, \text{qftp}_N(d') = \text{qftp}_M(d), N \models \varphi(d')$$

となる N と $d' \in N^n$ をとる.

$\text{qftp}_N(d') = \text{qftp}_M(d)$ より, $\langle d' \rangle_N \cong \langle d \rangle_M$ である.

($\langle d \rangle_M$ は d で生成される M の部分構造. $\langle d' \rangle_N$ も同様.)

主張. $\Gamma(x) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid T \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x)\} \Rightarrow T \cup \Gamma(x) \vdash \varphi(x).$

そうでないと, $M \models T \cup \Gamma(d) \cup \{\neg\varphi(d)\}$ となる M と $d \in M^n$ がある.
そこで,

$$\text{qftp}_M(d) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid M \models \psi(d)\}$$

として

$$T \cup \text{qftp}_M(d) \cup \{\varphi(x)\}$$

を考えると, これも整合的になる (演習問題).

$$N \models T, \text{qftp}_N(d') = \text{qftp}_M(d), N \models \varphi(d')$$

となる N と $d' \in N^n$ をとる.

$\text{qftp}_N(d') = \text{qftp}_M(d)$ より, $\langle d' \rangle_N \cong \langle d \rangle_M$ である.

($\langle d \rangle_M$ は d で生成される M の部分構造. $\langle d' \rangle_N$ も同様.)

$N \models \varphi(d'), M \models \neg\varphi(d)$ なので, 次の (2) に反する.

(2) $M, N \models T, A \subset M, A \subset N$ のとき,

任意の $a \in A^n$ に対し, $M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(a).$

$\Gamma(x) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid T \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x)\} \Rightarrow T \cup \Gamma(x) \vdash \varphi(x)$
とコンパクト性定理より,

$$T \vdash \psi(x) \leftrightarrow \varphi(x)$$

となる $\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}$ がある.

$\Gamma(x) = \{\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}} \mid T \vdash \varphi(x) \rightarrow \psi(x)\} \Rightarrow T \cup \Gamma(x) \vdash \varphi(x)$
とコンパクト性定理より,

$$T \vdash \psi(x) \leftrightarrow \varphi(x)$$

となる $\psi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}$ がある.

これで, 次の (2) から (1) が示せた.

定理 1

$\varphi(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 1$) を言語 $\mathcal{L}$ の論理式とすると次の 2 つは同値:

(1) ある qf 論理式 $\psi(x)$ が存在して $T \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)$

(2) $M, N \models T$, $A \subset M$, $A \subset N$ のとき,
任意の $a \in A^n$ に対し, $M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(a)$.

定理 1 の条件 (2): $\varphi(x)$ の量化記号が消去できるための条件

(2) $M, N \models T, A \subset M, A \subset N$ のとき,
任意の $a \in A^n$ に対し, $M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(a)$.

$\exists y \varphi(x, y)$ (y は 1 つの変数, $\varphi(x, y) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}$) の $\exists y$ がいつでも消去できれば QE 可能になるので, 次を得る.

定理 2

T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. すると次の 2 つは同値:

(1) T は $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能.

(2) 任意の $\varphi(x, y) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$, y は 1 つの変数) に対し,
 $M, N \models T, A \subset M, A \subset N$ のとき,
 $a \in A^n, b \in M$ に対し, $M \models \varphi(a, b)$ ならば
ある $b' \in N$ に対し $N \models \varphi(a, b')$.

定理 3

T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. すると次の 2 つは同値:

(1) T は $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能.

(2) $A \subset M \models T, N \models T$ で, N は $|M|^+$ 飽和であるとする.

$f : A \rightarrow N$ が $\mathcal{L}$ 構造の埋め込みのとき, f を $\mathcal{L}$ 構造の埋め込み

$f' : M \rightarrow N$ に拡張できる.

定理 3

T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. すると次の 2 つは同値:

(1) T は $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能.

(2) $A \subset M \models T, N \models T$ で, N は $|M|^+$ 飽和であるとする.

$f : A \rightarrow N$ が $\mathcal{L}$ 構造の埋め込みのとき, f を $\mathcal{L}$ 構造の埋め込み $f' : M \rightarrow N$ に拡張できる.

(1) $\Rightarrow$ (2). T が $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能のとき, $\mathcal{L}$ に関する部分同型写像は部分初等写像になることを使うと, (1) から (2) が出る.

定理 3

T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. すると次の 2 つは同値:

(1) T は $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能.

(2) $A \subset M \models T, N \models T$ で, N は $|M|^+$ 飽和であるとする.

$f : A \rightarrow N$ が $\mathcal{L}$ 構造の埋め込みのとき, f を $\mathcal{L}$ 構造の埋め込み $f' : M \rightarrow N$ に拡張できる.

(1) $\Rightarrow$ (2). T が $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能のとき, $\mathcal{L}$ に関する部分同型写像は部分初等写像になることを使うと, (1) から (2) が出る.

(2) $\Rightarrow$ (1). 定理 2 の (2) を調べる. $A \subset M \models T, A \subset N \models T$, $\varphi(x, y) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}, M \models \varphi(a, b), a \in A^n, b \in M$ と仮定する.

定理 3

T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. すると次の 2 つは同値:

(1) T は $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能.

(2) $A \subset M \models T, N \models T$ で, N は $|M|^+$ 飽和であるとする.

$f : A \rightarrow N$ が $\mathcal{L}$ 構造の埋め込みのとき, f を $\mathcal{L}$ 構造の埋め込み $f' : M \rightarrow N$ に拡張できる.

(1) $\Rightarrow$ (2). T が $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能のとき, $\mathcal{L}$ に関する部分同型写像は部分初等写像になることを使うと, (1) から (2) が出る.

(2) $\Rightarrow$ (1). 定理 2 の (2) を調べる. $A \subset M \models T, A \subset N \models T$,

$\varphi(x, y) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}, M \models \varphi(a, b), a \in A^n, b \in M$ と仮定する.

$N \prec N', N': |M|^+$ 飽和となる N' をとる.

(2) より, $\text{id} : A \rightarrow A \subset N'$ を拡張して, $\mathcal{L}$ 埋め込み $f' : M \rightarrow N'$ を得る.

定理 3

T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. すると次の 2 つは同値:

(1) T は $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能.

(2) $A \subset M \models T, N \models T$ で, N は $|M|^+$ 飽和であるとする.

$f: A \rightarrow N$ が $\mathcal{L}$ 構造の埋め込みのとき, f を $\mathcal{L}$ 構造の埋め込み $f': M \rightarrow N$ に拡張できる.

(1) $\Rightarrow$ (2). T が $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能のとき, $\mathcal{L}$ に関する部分同型写像は部分初等写像になることを使うと, (1) から (2) が出る.

(2) $\Rightarrow$ (1). 定理 2 の (2) を調べる. $A \subset M \models T, A \subset N \models T$,

$\varphi(x, y) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}, M \models \varphi(a, b), a \in A^n, b \in M$ と仮定する.

$N \prec N', N': |M|^+$ 飽和となる N' をとる.

(2) より, $\text{id}: A \rightarrow A \subset N'$ を拡張して, $\mathcal{L}$ 埋め込み $f': M \rightarrow N'$ を得る. すると, $N' \models \varphi(a, f'(b))$.

$N \prec N'$ より, $N \models \exists y \varphi(a, y)$.

定理

代数的閉体の公理系 ACF は環の言語 $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ で量化記号消去可能である.

定理

代数的閉体の公理系 ACF は環の言語 $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ で量化記号消去可能である.

まず, 代数的閉体の環の言語における部分構造は整域である.

定理

代数的閉体の公理系 ACF は環の言語 $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ で量化記号消去可能である.

まず, 代数的閉体の環の言語における部分構造は整域である.

$D \subset K \models \text{ACF}$, $L \models \text{ACF}$ で, L は $|K|^+$ 飽和で, $f: D \rightarrow L$ を環の埋め込みとする.

K と L の標数は同じである. D の分数体 k と $f(D)$ の分数体も同型になる.

定理

代数的閉体の公理系 ACF は環の言語 $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ で量化記号消去可能である.

まず, 代数的閉体の環の言語における部分構造は整域である.

$D \subset K \models \text{ACF}$, $L \models \text{ACF}$ で, L は $|K|^+$ 飽和で, $f: D \rightarrow L$ を環の埋め込みとする.

K と L の標数は同じである. D の分数体 k と $f(D)$ の分数体も同型になる.

$|K| = \kappa$ とする.

$k = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K$, $\bigcup_{i < \kappa} K_i = K$,
 K_{i+1}/K_i は体の単拡大となるように体の拡大列がとれる.

定理

代数的閉体の公理系 ACF は環の言語 $\{+, -, \cdot, 0, 1\}$ で量化記号消去可能である.

まず, 代数的閉体の環の言語における部分構造は整域である.

$D \subset K \models \text{ACF}$, $L \models \text{ACF}$ で, L は $|K|^+$ 飽和で, $f: D \rightarrow L$ を環の埋め込みとする.

K と L の標数は同じである. D の分数体 k と $f(D)$ の分数体も同型になる.

$|K| = \kappa$ とする.

$k = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K$, $\bigcup_{i < \kappa} K_i = K$,
 K_{i+1}/K_i は体の単拡大となるように体の拡大列がとれる.

体の埋め込み $f_i: K_i \rightarrow L$ が存在するとき, K_{i+1}/K_i は代数拡大か超越拡大であるが, どちらの場合も f_i を $f_{i+1}: K_{i+1} \rightarrow L$ に拡張できる. L は κ^+ 飽和なので, 超越元が十分ある.

定理

標数 0 の微分閉体の公理系 DCF は言語 $\{+, -, \cdot, 0, 1, \delta\}$ で量化記号消去可能である.

微分体は体の公理系に微分演算子の公理

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y), \quad \delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y)$$

を加えたものである. 体における代数的閉体に対応するものが微分体における微分閉体であるが, 詳細は省略する.

この定理は, 先程の代数的閉体の公理系の量化記号消去の証明と平行して証明できる.

定義

公理系 T が**モデル完全**であるとは

$$M \models T, N \models T, M \subset N \Rightarrow M \prec N$$

T が量化記号消去可能ならば T はモデル完全である.

定義と事実

公理系 T に対し,

$$T_{\forall} = \{\forall x \varphi(x) \mid T \vdash \forall x \varphi(x), \varphi(x) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}\}$$

とすると

$$A \models T_{\forall} \iff A \text{ は } T \text{ のモデルの部分構造.}$$

定理 4

T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. すると次の 2 つは同値:

(1) T は $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能.

(2) T はモデル完全で $T_{\forall}$ が融合性をもつ.

$T_{\forall}$ が融合性をもつとは, $A, B, C \models T_{\forall}$ で $A \subset B, A \subset C$, のとき,
 $A \subset B \subset D$ ($\mathcal{L}$ 拡大構造) となる $D \models T_{\forall}$ が存在して, A を点ごとに固定したまま $\mathcal{L}$ 構造として C を D に埋め込めること.

定理 4

T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. すると次の 2 つは同値:

(1) T は $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能.

(2) T はモデル完全で $T_{\forall}$ が融合性をもつ.

$T_{\forall}$ が融合性をもつとは, $A, B, C \models T_{\forall}$ で $A \subset B, A \subset C$, のとき,
 $A \subset B \subset D$ ($\mathcal{L}$ 拡大構造) となる $D \models T_{\forall}$ が存在して, A を点ごとに固定したまま $\mathcal{L}$ 構造として C を D に埋め込めること.

(1) $\Rightarrow$ (2). T が量化記号消去可能とすると, T はモデル完全. また,
 $A \subset B \subset M \models T, A \subset C \subset N \models T$ とすると, $N \prec N'$ で $N': |M|^+$ 飽和な
 N' をとれば, 定理 3 (2) より, B は N' に埋め込める.

定理 4

T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. すると次の 2 つは同値:

(1) T は $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能.

(2) T はモデル完全で $T_{\forall}$ が融合性をもつ.

$T_{\forall}$ が融合性をもつとは, $A, B, C \models T_{\forall}$ で $A \subset B, A \subset C$, のとき,
 $A \subset B \subset D$ ($\mathcal{L}$ 拡大構造) となる $D \models T_{\forall}$ が存在して, A を点ごとに固定したまま $\mathcal{L}$ 構造として C を D に埋め込めること.

(2) $\Rightarrow$ (1). 定理 2 の (2) を調べる. $A \subset M \models T, A \subset N \models T$,
 $\varphi(x, y) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}, M \models \varphi(a, b), a \in A^n, b \in M$ と仮定する.

定理 4

T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. すると次の 2 つは同値:

(1) T は $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能.

(2) T はモデル完全で $T_{\forall}$ が融合性をもつ.

$T_{\forall}$ が融合性をもつとは, $A, B, C \models T_{\forall}$ で $A \subset B, A \subset C$, のとき,
 $A \subset B \subset D$ ($\mathcal{L}$ 拡大構造) となる $D \models T_{\forall}$ が存在して, A を点ごとに固定したまま $\mathcal{L}$ 構造として C を D に埋め込めること.

(2) $\Rightarrow$ (1). 定理 2 の (2) を調べる. $A \subset M \models T, A \subset N \models T$,

$\varphi(x, y) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}, M \models \varphi(a, b), a \in A^n, b \in M$ と仮定する.

$T_{\forall}$ の融合性より, $A \subset M \subset D \models T, A \subset N' \subset D, N \cong_A N'$ となる D がある.

定理 4

T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. すると次の 2 つは同値:

(1) T は $\mathcal{L}$ で量化記号消去可能.

(2) T はモデル完全で $T_{\forall}$ が融合性をもつ.

$T_{\forall}$ が融合性をもつとは, $A, B, C \models T_{\forall}$ で $A \subset B, A \subset C$, のとき,
 $A \subset B \subset D$ ($\mathcal{L}$ 拡大構造) となる $D \models T_{\forall}$ が存在して, A を点ごとに固定したまま $\mathcal{L}$ 構造として C を D に埋め込めること.

(2) $\Rightarrow$ (1). 定理 2 の (2) を調べる. $A \subset M \models T, A \subset N \models T$,

$\varphi(x, y) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}, M \models \varphi(a, b), a \in A^n, b \in M$ と仮定する.

$T_{\forall}$ の融合性より, $A \subset M \subset D \models T, A \subset N' \subset D, N \cong_A N'$ となる D がある.

$\varphi(x, y) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}$ より, $D \models \varphi(a, b)$ で $D \models \exists y \varphi(a, y)$.

T がモデル完全なので $N' \prec D$ となり, $N' \models \exists y \varphi(a, y)$.

$N \cong_A N'$ より, $N \models \exists y \varphi(a, y)$.

A. Robinson's Test

公理系 T について次は同値である.

(1) T はモデル完全

(2) $M \models T, N \models T, M \subset N, \varphi(x, y) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}$ (x, y は変数の組), $a \in M^n$ のとき,

$N \models \exists y \varphi(a, y) \Rightarrow M \models \exists y \varphi(a, y).$

定義. T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. $A \models T_{\forall}$ に対し $A \subset M \models T$ とする. $f : A \rightarrow N \models T$ が $\mathcal{L}$ 構造の埋め込みのとき, f を $\mathcal{L}$ 構造の埋め込み $f' : M \rightarrow N$ に必ず拡張できるとき, M を A 上の**素モデル**と呼ぶ.

定理 5

公理系 T がモデル完全で, $T_{\forall}$ の任意のモデル上 T の素モデルが存在するならば T は量化記号消去可能である.

定義. T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. $A \models T_{\forall}$ に対し $A \subset M \models T$ とする. $f : A \rightarrow N \models T$ が $\mathcal{L}$ 構造の埋め込みのとき, f を $\mathcal{L}$ 構造の埋め込み $f' : M \rightarrow N$ に必ず拡張できるとき, M を A 上の**素モデル**と呼ぶ.

定理 5

公理系 T がモデル完全で, $T_{\forall}$ の任意のモデル上 T の素モデルが存在するならば T は量化記号消去可能である.

$A \models T_{\forall}$ とし, A 上の素モデルを M とする. $A \subset M_1 \models T, A \subset M_2 \models T$ とする.

定義. T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. $A \models T_V$ に対し $A \subset M \models T$ とする. $f : A \rightarrow N \models T$ が $\mathcal{L}$ 構造の埋め込みのとき, f を $\mathcal{L}$ 構造の埋め込み $f' : M \rightarrow N$ に必ず拡張できるとき, M を A 上の**素モデル**と呼ぶ.

定理 5

公理系 T がモデル完全で, T_V の任意のモデル上 T の素モデルが存在するならば T は量化記号消去可能である.

$A \models T_V$ とし, A 上の素モデルを M とする. $A \subset M_1 \models T, A \subset M_2 \models T$ とする.

すると, A 上 M と同型な部分モデルが M_1 と M_2 の中にとれる. その部分を M と同一視して, $M \subset M_1, M \subset M_2$ と考えてよい.

定義. T を言語 $\mathcal{L}$ での公理系とする. $A \models T_V$ に対し $A \subset M \models T$ とする. $f: A \rightarrow N \models T$ が $\mathcal{L}$ 構造の埋め込みのとき, f を $\mathcal{L}$ 構造の埋め込み $f': M \rightarrow N$ に必ず拡張できるとき, M を A 上の**素モデル**と呼ぶ.

定理 5

公理系 T がモデル完全で, T_V の任意のモデル上 T の素モデルが存在するならば T は量化記号消去可能である.

$A \models T_V$ とし, A 上の素モデルを M とする. $A \subset M_1 \models T, A \subset M_2 \models T$ とする.

すると, A 上 M と同型な部分モデルが M_1 と M_2 の中にとれる. その部分を M と同一視して, $M \subset M_1, M \subset M_2$ と考えてよい.

T はモデル完全なので, $M \prec M_1, M \prec M_2$.

2つの初等拡大が融合できることはコンパクト性定理からすぐわかる.

定理 2 にもどって考えると、素モデルが存在するときはロビンソン判定法を弱めた次の条件だけで量化記号消去が可能になる。

定理 6

T を公理系とする。

- (1) $T_{\forall}$ の任意のモデル上 T の素モデルが存在し、
- (2) $M \models T, N \models T, M \subset N, \varphi(x, y) \in \mathcal{L}^{\text{qf}}$ (x 変数の組, y は 1 変数), $a \in M^n$ のとき,
 $N \models \exists y \varphi(a, y) \Rightarrow M \models \exists y \varphi(a, y)$

であるとする。

すると、 T は量化記号消去可能である。

定理 (Presburger)

$(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1, <)$ の定義による拡張 $(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1, <, * \equiv * \pmod{n})_{n>1}$ の公理系 T_{Pres} は量化記号消去可能である.

ここで, $x \equiv y \pmod{n} \iff \exists z \underbrace{(z + \cdots + z)}_n = x - y$.

単項述語 $n|*$ を代わりに導入しても o.k.

T_{Pres} と $T_{\text{Pres}, \forall}$ は具体的な公理が知られている.

Marker の教科書では, 定理 6 を使って証明している.

定理 (Macintyre)

$\mathbb{Q}_p$ を $\mathbb{Q}$ の p 進完備化とする.

$(\mathbb{Q}_p, +, -, \cdot, 0, 1, P_n)_{n \geq 1}$ で量記号消去が可能である.

ここで, $P_n(x) \iff \exists y (x = y^n)$

定理 (Macintyre)

$\mathbb{Q}_p$ を $\mathbb{Q}$ の p 進完備化とする.

$(\mathbb{Q}_p, +, -, \cdot, 0, 1, P_n)_{n \geq 1}$ で量記号消去が可能である.

ここで, $P_n(x) \iff \exists y (x = y^n)$

A. Macintyre, On definable subsets of p -adic fields, JSL, Vol. 41, No. 3 (1976), 605–610.

Macintyre は飽和モデルへの埋め込みの拡張可能性 (定理 3) の方法で証明している.

乗法群において, n 乗剰余が有限なことも重要.

定理 (Macintyre)

$\mathbb{Q}_p$ を $\mathbb{Q}$ の p 進完備化とする.

$(\mathbb{Q}_p, +, -, \cdot, 0, 1, P_n)_{n \geq 1}$ で量記号消去が可能である.

ここで, $P_n(x) \iff \exists y (x = y^n)$

A. Macintyre, On definable subsets of p -adic fields, JSL, Vol. 41, No. 3 (1976), 605–610.

Macintyre は飽和モデルへの埋め込みの拡張可能性 (定理 3) の方法で証明している.

乗法群において, n 乗剰余が有限なことも重要.

Macintyre は付値環を表す述語も導入しているが, $P_2(1 + px^2)$ で付値環は定義される ($p \neq 2$ のとき). $p = 2$ のときは別の方法で定義できる.

定理 (Macintyre)

$\mathbb{Q}_p$ を $\mathbb{Q}$ の p 進完備化とする.

$(\mathbb{Q}_p, +, -, \cdot, 0, 1, P_n)_{n \geq 1}$ で量記号消去が可能である.

ここで, $P_n(x) \iff \exists y (x = y^n)$

A. Macintyre, On definable subsets of p -adic fields, JSL, Vol. 41, No. 3 (1976), 605–610.

Macintyre は飽和モデルへの埋め込みの拡張可能性 (定理 3) の方法で証明している.

乗法群において, n 乗剰余が有限なことも重要.

Macintyre は付値環を表す述語も導入しているが, $P_2(1 + px^2)$ で付値環は定義される ($p \neq 2$ のとき). $p = 2$ のときは別の方法で定義できる.

実数体において, $<$ の代わりに P_2 (平方数) を述語として導入しても QE が可能.

$x = (x_1, \dots, x_m)$: 変数

$f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathbb{Z}[x]$: 多項式

$X : f_1, f_2, \dots, f_r$ で定義される代数多様体

i.e. $f_1(x) = 0 \wedge f_2(x) = 0 \wedge \dots \wedge f_r = 0$ という論理式

環 R に対し, $X(R) = \{a \in R^m \mid R \models f_i(a) = 0 \ (i = 1, \dots, r)\}$ とする。

$x = (x_1, \dots, x_m)$: 変数

$f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathbb{Z}[x]$: 多項式

$X : f_1, f_2, \dots, f_r$ で定義される代数多様体

i.e. $f_1(x) = 0 \wedge f_2(x) = 0 \wedge \dots \wedge f_r = 0$ という論理式

環 R に対し, $X(R) = \{a \in R^m \mid R \models f_i(a) = 0 \ (i = 1, \dots, r)\}$ とする。

p を素数とする。

$$\tilde{N}_n = \#X(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

$$N_n = \#\{a \bmod p^n \mid a \in X(\mathbb{Z}_p)\}$$

$x = (x_1, \dots, x_m)$: 変数

$f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathbb{Z}[x]$: 多項式

$X : f_1, f_2, \dots, f_r$ で定義される代数多様体

i.e. $f_1(x) = 0 \wedge f_2(x) = 0 \wedge \dots \wedge f_r = 0$ という論理式

環 R に対し, $X(R) = \{a \in R^m \mid R \models f_i(a) = 0 \ (i = 1, \dots, r)\}$ とする。

p を素数とする。

$$\tilde{N}_n = \#X(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

$$N_n = \#\{a \bmod p^n \mid a \in X(\mathbb{Z}_p)\}$$

問

- (Borewicz, Šhafarevič)

$Q(T) = \sum_{n \geq 0} \tilde{N}_n T^n$ は T の有理式になるか。

- (Serre, Oesterlé)

$P(T) = \sum_{n \geq 0} N_n T^n$ は T の有理式になるか。

定理

X を $\mathbb{Z}$ 係数の代数多様体, p を素数,

$$\tilde{N}_n = \#X(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}),$$

$$N_n = \#\{a \bmod p^n \mid a \in X(\mathbb{Z}_p)\}$$

とする。

- (Igusa, 1974)

$Q(T) = \sum_{n \geq 0} \tilde{N}_n T^n$ は T の有理式になる。

- (Denef, 1984)

$P(T) = \sum_{n \geq 0} N_n T^n$ は T の有理式になる。

定理

X を $\mathbb{Z}$ 係数の代数多様体, p を素数,

$$\tilde{N}_n = \#X(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}),$$

$$N_n = \#\{a \bmod p^n \mid a \in X(\mathbb{Z}_p)\}$$

とする。

- (Igusa, 1974)

$Q(T) = \sum_{n \geq 0} \tilde{N}_n T^n$ は T の有理式になる。

- (Denef, 1984)

$P(T) = \sum_{n \geq 0} N_n T^n$ は T の有理式になる。

これらは, p 進積分と関連づけて証明される。

$\mathbb{Q}_p^m$ 上には加法による平行移動で不変な $\mathbb{R}$ 値 Borel 測度 μ で $\mu(\mathbb{Z}_p^m) = 1$ となるものが唯一つ存在する (Haar 測度)。

$\mathbb{Q}_p^m$ 上には加法による平行移動で不変な $\mathbb{R}$ 値 Borel 測度 μ で $\mu(\mathbb{Z}_p^m) = 1$ となるものが唯一つ存在する (Haar 測度)。

基本的な性質:

- $a \in \mathbb{Q}_p^m$ に対し, $\mu(a + p^n \mathbb{Z}_p^m) = p^{-mn}$.
- $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ と可測な $A \subset \mathbb{Q}_p^m$ に対し, $\mu(\lambda A) = |\lambda|^m \mu(A)$.
ここで, $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$, $|\lambda| = p^{-\text{ord } \lambda}$.

$\mathbb{Q}_p^m$ 上には加法による平行移動で不変な $\mathbb{R}$ 値 Borel 測度 μ で $\mu(\mathbb{Z}_p^m) = 1$ となるものが唯一つ存在する (Haar 測度)。

基本的な性質:

- $a \in \mathbb{Q}_p^m$ に対し, $\mu(a + p^n \mathbb{Z}_p^m) = p^{-mn}$.
- $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ と可測な $A \subset \mathbb{Q}_p^m$ に対し, $\mu(\lambda A) = |\lambda|^m \mu(A)$.

ここで, $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$, $|\lambda| = p^{-\text{ord } \lambda}$.

$\mathbb{Q}_p^m$ 上の実数値関数の積分も標準的に定義される。積分のときは, 測度を $|dx| = |dx_1| \cdots |dx_m|$ と書く。

例. $s \in \mathbb{R}, s \geq 0$ とする。

$$\begin{aligned} \int_{x \in \mathbb{Z}_p, \text{ord } x \geq n} |x|^s |dx| &= \sum_{j \geq n} p^{-sj} \int_{\text{ord } x = j} |dx| \\ &= \sum_{j \geq n} p^{-sj} (p^j - p^{j-1}) \\ &= (1 - p^{-1}) p^{-(s+1)n} / (1 - p^{-s-1}). \end{aligned}$$

$N_n = \#\{x \bmod p^n \mid x \in \mathbb{Z}_p^m, f_i(x) = 0 \ (i = 1, \dots, r)\}$ とすると
 $N_n = p^{mn} \mu(\{x \in \mathbb{Z}_p^m \mid \exists y \in \mathbb{Z}_p^m \ x \equiv y \pmod{w}, f_i(y) = 0 \ (i = 1, \dots, r)\})$
 ここで,

$$D = \{(x, w) \in \mathbb{Z}_p^m \times \mathbb{Z}_p \mid \exists y \in \mathbb{Z}_p^m \ x \equiv y \pmod{w}, f_i(y) = 0 \ (i = 1, \dots, r)\}$$

とすると

$$\int_D |w|^s |dx| |dw| = P(p^{-m-1} p^{-s}) \quad (P(T) = \sum_{n \geq 0} N_n T^n)$$

左辺が p^{-s} の有理式で表現できることを示せばよい。

Macintyre の定理から, D は Macintyre の言語の quantifier-free formula で書ける。すると, D を分割して, それぞれの成分上で特異点解消定理を利用すると積分の有理性が示せる。

定理 (Pas)

多ソート構造 $(K, k, \Gamma, \text{ord}, \overline{ac})$ を考える. K は標数 0 の付値体 (体ソート), k は標数 0 に剰余体 (剰余体ソート), Γ は値群 (群ソート), ord は加法的付値, $\overline{ac}$ は angular component とする. Γ は Presburger 算術になっているとする.

このとき, 体ソートの量化記号は消去できる.

定理 (Pas)

多ソート構造 $(K, k, \Gamma, \text{ord}, \overline{ac})$ を考える. K は標数 0 の付値体 (体ソート), k は標数 0 に剰余体 (剰余体ソート), Γ は値群 (群ソート), ord は加法的付値, $\overline{ac}$ は angular component とする. Γ は Presburger 算術になっているとする.

このとき, 体ソートの量化記号は消去できる.

$K = \overline{k}((t))$, $\overline{ac}(x) = x \in \overline{k}((t))$ の最低次の係数が一つの例である. $\mathbb{Q}_p$ と $k = \mathbf{F}_p$ の場合の素数上のウルトラフィルターによるウルトラプロダクトも例になっている.

定理 (Pas)

多ソート構造 $(K, k, \Gamma, \text{ord}, \overline{ac})$ を考える. K は標数 0 の付値体 (体ソート), k は標数 0 に剰余体 (剰余体ソート), Γ は値群 (群ソート), ord は加法的付値, $\overline{ac}$ は angular component とする. Γ は Presburger 算術になっているとする.

このとき, 体ソートの量化記号は消去できる.

$K = \overline{k}((t))$, $\overline{ac}(x) = x \in \overline{k}((t))$ の最低次の係数が一つの例である. $\mathbb{Q}_p$ と $k = \mathbf{F}_p$ の場合の素数上のウルトラフィルターによるウルトラプロダクトも例になっている.

Pas の定理により, Denef のポアンカレ級数の有理性定理の p に関する一様性が導ける.

定理 (Pas)

多ソート構造 $(K, k, \Gamma, \text{ord}, \overline{ac})$ を考える. K は標数 0 の付値体 (体ソート), k は標数 0 に剰余体 (剰余体ソート), Γ は値群 (群ソート), ord は加法的付値, $\overline{ac}$ は angular component とする. Γ は Presburger 算術になっているとする.

このとき, 体ソートの量化記号は消去できる.

$K = \overline{k}((t))$, $\overline{ac}(x) = x \in \overline{k}((t))$ の最低次の係数が一つの例である. $\mathbb{Q}_p$ と $k = \mathbf{F}_p$ の場合の素数上のウルトラフィルターによるウルトラプロダクトも例になっている.

Pas の定理により, Denef のポアンカレ級数の有理性定理の p に関する一様性が導ける.

Pas の定理により, Kontsevich の motivic integration をもっと一般的なセッティングに拡張できる (Denef-Loeser).

J. Denef, F. Loeser, Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration, Invent. Math. 135, 201–232 (1999).

J. Denef, F. Loeser, Definable sets, motives and p -adic integrals, J. AMS, Vol. 14, No. 2, 429–469 (2000).

定理 (A. Robinson)

K は代数的閉体, G は順序加群, v は K から G への自明でない (値が 2 つ以上ある) 付値とし, (K, G, v) を考える. すると, この構造の公理系は量化記号の消去ができる.

定理 (A. Robinson)

K は代数的閉体, G は順序加群, v は K から G への自明でない (値が 2 つ以上ある) 付値とし, (K, G, v) を考える. すると, この構造の公理系は量化記号の消去ができる.

証明は A. Robinson の Complete Theories (North Holland) にあり, A. Robinson's Test でモデル完全性を証明している. 代数拡大に対して付値の拡張の一意性があるので, 部分構造上, 素モデルが存在する. よって, 定理 5 より, 量化記号消去可能になる.

定理 (A. Robinson)

K は代数的閉体, G は順序加群, v は K から G への自明でない (値が 2 つ以上ある) 付値とし, (K, G, v) を考える. すると, この構造の公理系は量化記号の消去ができる.

証明は A. Robinson の Complete Theories (North Holland) にあり, A. Robinson's Test でモデル完全性を証明している. 代数拡大に対して付値の拡張の一意性があるので, 部分構造上, 素モデルが存在する. よって, 定理 5 より, 量化記号消去可能になる.

Hrushovski と Kazhdan はこの QE を利用して Denef-Loeser の定理の拡張をしている.

E. Hrushovski, D. Kazhdan, Integration in valued fields, ArXiv. (どこかに出版もされてたはず)

定理 (A. Robinson)

K は代数的閉体, G は順序加群, v は K から G への自明でない (値が 2 つ以上ある) 付値とし, (K, G, v) を考える. すると, この構造の公理系は量化記号の消去ができる.

証明は A. Robinson の Complete Theories (North Holland) にあり, A. Robinson's Test でモデル完全性を証明している. 代数拡大に対して付値の拡張の一意性があるので, 部分構造上, 素モデルが存在する. よって, 定理 5 より, 量化記号消去可能になる.

Hrushovski と Kazhdan はこの QE を利用して Denef-Loeser の定理の拡張をしている.

E. Hrushovski, D. Kazhdan, Integration in valued fields, ArXiv. (どこかに出版もされてたはず)

Hrushovski, Loeser, Non-archimedean tame topology and stably dominated types, ArXiv.

体に自己同型を単項演算子として加えた構造 $(K, +, -, \cdot, 0, 1, \sigma)$ のクラス (差分体のクラス) においても, 差分閉体と呼ばれる体のクラスが一階の公理系で定義できる. この公理系を **ACFA** と呼ぶ. ACFA はモデル完全だが, 完全な QE はできない.

体に自己同型を単項演算子として加えた構造 $(K, +, -, \cdot, 0, 1, \sigma)$ のクラス (差分体のクラス) においても, 差分閉体と呼ばれる体のクラスが一階の公理系で定義できる. この公理系を **ACFA** と呼ぶ.

ACFA はモデル完全だが, 完全な QE はできない.

Hrushovski は ACFA のモデル理論を利用して, 数体の Manin-Mumford 予想の証明を与えた. 等分点の有限性などの定理であるが, 個数の評価を与える具体的な上界が初めて与えられた. Raynaud がすでに証明していたが, 使っていた Serre のガロア表現の理論に **effective** かどうか知られていないところがあった (現在はそれも **effective** ということがわかっている).

体に自己同型を単項演算子として加えた構造 $(K, +, -, \cdot, 0, 1, \sigma)$ のクラス (差分体のクラス) においても, 差分閉体と呼ばれる体のクラスが一階の公理系で定義できる. この公理系を **ACFA** と呼ぶ.

ACFA はモデル完全だが, 完全な QE はできない.

Hrushovski は ACFA のモデル理論を利用して, 数体の Manin-Mumford 予想の証明を与えた. 等分点の有限性などの定理であるが, 個数の評価を与える具体的な上界が初めて与えられた. Raynaud がすでに証明していたが, 使っていた Serre のガロア表現の理論に **effective** かどうか知られていないところがあった (現在はそれも **effective** ということがわかっている).

Rössler は Hrushovski の証明を参考に, Serre の理論を使わない Manin-Mumford 予想の証明を与えた.

一方, Pillay も ACFA を使うけれどもモデル理論を使わない証明を与えた.

Hrushovski は分離閉体のモデル理論とそこでの Zariski Geometry (Hrushovski, Zilber) の深い理論を使って、正標数の関数体における Mordell-Lang 予想 (GML) を証明した。長いことモデル理論を使わない証明は知られていなかった。

2010 年 12 月に、Manin-Mumford 予想から正標数の GML を導ける可能性について Pillay がパリで講演し、モデル理論を使うアイデアを述べている。それを参考に、Rössler が Manin-Mumford 予想から正標数の GML を導くことに成功した (2011 年 6 月の Oleron のモデル理論の集会で発表)。これで、正標数の GML の代数的な証明が得られたことになる。