

Weakly o-minimal structures

田中 広志

阿南工業高等専門学校 一般教科

数学基礎論サマースクール

2011 年 8 月 30 日

於神戸大学

Outline

- 1 Weakly o-minimal structures
- 2 Weakly o-minimal ordered groups and fields
- 3 Monotonicity theorem
- 4 Cell decomposition theorem
- 5 References

この発表ではいつも、

$M = (M, <, \dots)$ を端点を持たない稠密な全順序構造とする。

また、論理式と書いた場合、 M の元を定数として言語に加えたものにおいてできる論理式として考えることとする。

この発表ではいつも、

$M = (M, <, \dots)$ を端点を持たない稠密な全順序構造とする。

また、論理式と書いた場合、 M の元を定数として言語に加えたものにおいてできる論理式として考えることとする。

$X \subseteq M^n$ が **definable** であるとは、

$X = \{a \in M^n : M \models \varphi(a)\}$ となる論理式 $\varphi(x)$ が存在することとする。

Example 0.1

$(1, 2) = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \wedge x < 2\}$ は $(\mathbb{R}, <, \dots)$ で definable。

Example 0.2

$\mathcal{R} = (\mathbb{R}, <, +, \cdot, f)$ で, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は関数とする。

$X := \{a \in \mathbb{R} : f \text{ は } a \text{ で連続}\}$ とする。

このとき,

$X = \{a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\}$

と書ける。

よって, X は $\mathcal{R}$ で definable である。

Definition 1.1

- $A \subseteq M$ が M の **convex** 集合であるとは、
任意の $a, b \in A$ に対して、 $(a, b) \subseteq A$ となることである。
- さらに $\sup A, \inf A \in M \cup \{\pm\infty\}$,
のとき、 A は M の **interval** という。

Definition 1.1

- $A \subseteq M$ が M の **convex** 集合であるとは、
任意の $a, b \in A$ に対して、 $(a, b) \subseteq A$ となることである。
- さらに $\sup A, \inf A \in M \cup \{\pm\infty\}$,
のとき、 A は M の **interval** という。

Example 1.2

$M = (\mathbb{Q}, <)$ において、
 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ は、convex 集合だが interval ではない。

M には open interval を基本開集合とした位相が入っているを考える。
また, M^n には M の直積位相が入っているとする。

Definition 1.3

- M が **o-minimal** であるとは,
任意の definable 集合 $A \subseteq M$ は, interval の有限和で表せることとする。
- M が **weakly o-minimal** であるとは,
任意の definable 集合 $A \subseteq M$ は, convex 集合の有限和で表せることとする。

Definition 1.3

- M が **o-minimal** であるとは、
任意の definable 集合 $A \subseteq M$ は、interval の有限和で表せることとする。
- M が **weakly o-minimal** であるとは、
任意の definable 集合 $A \subseteq M$ は、convex 集合の有限和で表せることとする。
- 理論 T が **o-minimal (weakly o-minimal)** であるとは、
任意のモデル $M \models T$ が、o-minimal (weakly o-minimal) であることとする。

Example 1.4 (weakly o-minimal)

$Q := (\mathbb{Q}, <, P)$, ここで $P := (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ 。

このとき Q は, weakly o-minimal である。

Example 1.5 (weakly o-minimal)

$\mathcal{R} = (R, <, +, \cdot, V)$ を real closed valued field とする。

ここで V は convex non-trivial valuation ring である。

このとき $\mathcal{R}$ は, weakly o-minimal である。

M, N を L -構造とする。

$M \equiv N$ であるとは、

$\text{Th}(M) = \text{Th}(N)$ となることとする。

なお、 $\text{Th}(M) := \{\varphi \text{ はパラメータを含まない閉論理式} : M \models \varphi\}$ 。

Theorem 1.6 (Knight, Pillay and Steinhorn, 1986)

構造 M を o-minimal とし、構造 $N \equiv M$ とする。

このとき、 N も o-minimal になる。

Elementary equivalence

M, N を L -構造とする。

$M \equiv N$ であるとは、

$\text{Th}(M) = \text{Th}(N)$ となることとする。

なお、 $\text{Th}(M) := \{\varphi \text{ はパラメータを含まない閉論理式} : M \models \varphi\}$ 。

Theorem 1.6 (Knight, Pillay and Steinhorn, 1986)

構造 M を o-minimal とし、構造 $N \equiv M$ とする。

このとき、 N も o-minimal になる。

Remark 1.7 (Macpherson, Marker and Steinhorn, 2000)

構造 M が weakly o-minimal のときは、上記の定理は成り立たない。

Question 1.8 (Cherlin)

構造 M を weakly o-minimal とし, $A \subseteq M$ を convex 集合とする。
このとき, (M, A) は weakly o-minimal 構造になるか。

Question 1.8 (Cherlin)

構造 M を weakly o-minimal とし, $A \subseteq M$ を convex 集合とする。
このとき, (M, A) は weakly o-minimal 構造になるか。

この問題は現在のところ open である。

Theorem 1.9 (Baizhanov, 2001)

構造 M の理論 $\text{Th}(M)$ が weakly o-minimal とする。
 $A \subseteq M$ を convex 集合とする。
このとき, $\text{Th}(M, A)$ は weakly o-minimal になる。

Theorem 2.1 (Pillay and Steinhorn, 1986)

構造 M を o-minimal ordered group とする。

このとき、 M は abelian かつ divisible である。

Theorem 2.2 (Macpherson, Marker and Steinhorn, 2000)

構造 M を weakly o-minimal ordered group とする。

このとき、 M は abelian かつ divisible である。

Theorem 2.3 (Pillay and Steinhorn, 1986)

構造 M を o-minimal ordered ring とする。

このとき、 M は real closed field である。

Definition 2.4

順序体 M が**実閉体**であるとは、次のどれかひとつが成り立つことである。

- ① 任意の 1 変数多項式 $f(x) \in M[x]$ と任意の $a < b \in M$ に対して、 $f(a)f(b) < 0$ ならば $f(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在する。
- ② $M(i)$ は代数閉体である。
- ③ 任意の $a \in M$ に対して、 $a > 0$ ならば $\sqrt{a} \in M$ かつ、任意の奇数次の 1 変数多項式は M で解をもつ。

Theorem 2.5 (Macpherson, Marker and Steinhorn, 2000)

- ① 構造 M を o-minimal ordered ring とする。
このとき、 M は real closed ring である。
- ② 構造 M を o-minimal ordered field とする。
このとき、 M は real closed field である。

Theorem 2.5 (Macpherson, Marker and Steinhorn, 2000)

- 1 構造 M を o-minimal ordered ring とする。
このとき、 M は real closed ring である。
- 2 構造 M を o-minimal ordered field とする。
このとき、 M は real closed field である。

証明は、 M に archimedean valuation v を導入したとき、 (M, v) がヘンゼル体になることを示す。

Question 2.6 (Macpherson, Marker and Steinhorn, 2000)

Find a direct proof that every weakly o-minimal ordered field is real closed.

Theorem 3.1 (Pillay and Steinhorn, 1986)

構造 M を o-minimal とし, $D \subseteq M$ を definable,
 $f : D \rightarrow M$ を definable とする。

このとき, $D = X \sqcup I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n$ となる有限集合 X と open intervals I_i が
存在して, $f|_{I_i}$ は constant, または strictly monotone かつ連続である。

$C, D \subseteq M$ とする。

$C < D \underset{\text{def}}{\iff} \forall c \in C, d \in D \text{ に対して } c < d。$

$C, D \subseteq M$ とする。

$C < D \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall c \in C, d \in D \text{ に対して } c < d。$

対 $\langle C, D \rangle$ が **cut** とは,

$C < D, C \cup D = M, C \neq \emptyset \neq D$ かつ D は最小元を持たないこととする。

Cut $\langle C, D \rangle$ が **definable cut** とは,

C, D が definable であることとする。

$\overline{M} := \{ \langle C, D \rangle : \langle C, D \rangle \text{ は } M \text{ の definable cut} \}$ とする。

$\forall a \in M$ に対し $\text{cut} \langle (-\infty, a], (a, \infty) \rangle$ を考え, $M \subseteq \overline{M}$ と思う。

さらに

$$\langle C_1, D_1 \rangle < \langle C_2, D_2 \rangle \underset{\text{def}}{\iff} C_1 \subsetneq C_2$$

として, $(M, <)$ を $(\overline{M}, <)$ の部分構造とみなす。

$\forall a \in M$ に対し cut $\langle (-\infty, a], (a, \infty) \rangle$ を考え, $M \subseteq \overline{M}$ と思う。
さらに

$$\langle C_1, D_1 \rangle < \langle C_2, D_2 \rangle \stackrel{\text{def}}{\iff} C_1 \subsetneq C_2$$

として, $(M, <)$ を $(\overline{M}, <)$ の部分構造とみなす。

Remark 3.2

構造 M が o-minimal ならば $M = \overline{M}$ となる。

Definition 3.3 (Pillay and Steinhorn, 1986)

M が **definably complete** であるとは,
任意の definable 集合 $A \subseteq M$ は, $M \cup \{\pm\infty\}$ において上限と下限を持つとする。

O-minimal 構造は definably complete である。

$A \subseteq M^n$ を definable とする。

$f : A \rightarrow M$ が **definable** とは,
 $\{\langle x, y \rangle \in A \times M : y = f(x)\}$ が definable になることとする。

$f : A \rightarrow \overline{M}$ が **definable** とは,
 $\{\langle x, y \rangle \in A \times M : y < f(x)\}$ が definable になることとする。

$f : A \rightarrow \overline{M} \cup \{\pm\infty\}$ が **definable** とは,
 $f : A \rightarrow \overline{M}$ が definable,
または任意の $a \in A$ に対して $f(a) = \infty$,
または任意の $a \in A$ に対して $f(a) = -\infty$ となることとする。

$D \subseteq M$ とする。

$f : D \rightarrow \overline{M}$ が **locally strictly increaing** とは、

任意の $x \in D$ に対して、 x を含む open interval $I \subseteq D$ が存在して、 $f|I$ が strictly increasing となることとする。

Monotonicity theorem (weakly o-minimal case)

$D \subseteq M$ とする。

$f : D \rightarrow \overline{M}$ が **locally strictly increasing** とは、

任意の $x \in D$ に対して、 x を含む open interval $I \subseteq D$ が存在して、 $f|I$ が strictly increasing となることとする。

Theorem 3.4 (Monotonicity theorem, Arefiev, 1997)

構造 M を weakly o-minimal とし、 $D \subseteq M$ を definable、

$f : D \rightarrow \overline{M}$ を definable とする。

このとき、 $D = X \sqcup I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_n$ となる有限集合 X と open convex 集合 I_i が存在して、 $f|I_i$ は **locally** constant、または **locally** strictly monotone である。

Theorem 4.1 (Knight, Pillay and Steinhorn, 1986)

構造 M を o-minimal とし, $X \subseteq M^n$ を definable とする。

このとき, X はセル分解可能である。

つまり, $X = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_m$ となるセル $C_1, \dots, C_m$ が存在する。

Cell decomposition theorem (o-minimal case)

Theorem 4.1 (Knight, Pillay and Steinhorn, 1986)

構造 M を o-minimal とし, $X \subseteq M^n$ を definable とする。

このとき, X はセル分解可能である。

つまり, $X = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_m$ となるセル $C_1, \dots, C_m$ が存在する。

Weakly o-minimal の場合の同様の問題が, MODNET に掲載されている。

Question 4.2

Prove cell decomposition theorems for natural weakly o-minimal classes.

O-minimal 構造 M に対して, セルを帰納的に定義する:

O-minimal 構造 M に対して、セルを帰納的に定義する:

- 1 点 $\{a\}$ は 0-セルである。
- M の空でない open interval は 1-セルである。

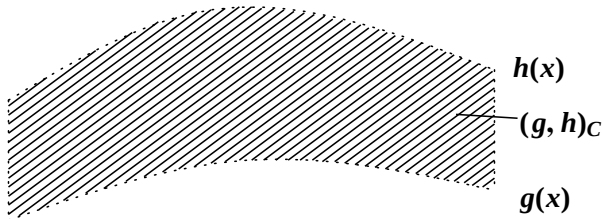
次に, $C \subseteq M^n$ を k -セルとする。

- $f : C \rightarrow M$ が definable 連続関数のとき,
グラフ $\{\langle x, y \rangle \in C \times M : y = f(x)\}$ は k -セルである。

セル (o-minimal の場合)

次に, $C \subseteq M^n$ を k -セルとする。

- $f : C \rightarrow M$ が definable 連続関数のとき,
グラフ $\{\langle x, y \rangle \in C \times M : y = f(x)\}$ は k -セルである。
- $g, h : C \rightarrow M \cup \{\pm\infty\}$ が definable 連続関数で, C 上 $g < h$ とする。
このとき,
 $(g, h)_C := \{\langle x, y \rangle \in C \times M : g(x) < y < h(x)\}$ は $(k+1)$ -セルである。



セル (weakly o-minimal の場合)

Weakly o-minimal 構造 M に対して、セルを帰納的に定義する:

Weakly o-minimal 構造 M に対して、セルを帰納的に定義する:

- 1 点 $\{a\}$ は 0-セルである。
- M の空でない open convex 集合は 1-セルである。

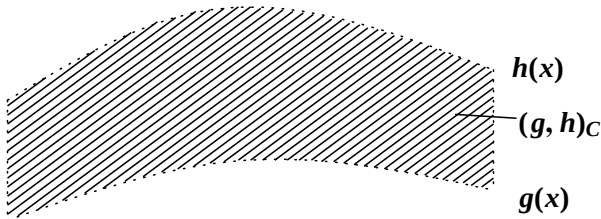
次に, $C \subseteq M^n$ を k -セルとする。

- $f : C \rightarrow M$ が definable 関数のとき,
グラフ $\{\langle x, y \rangle \in C \times M : y = f(x)\}$ は k -セルである。

セル (weakly o-minimal の場合)

次に, $C \subseteq M^n$ を k -セルとする。

- $f : C \rightarrow M$ が definable 関数のとき,
グラフ $\{\langle x, y \rangle \in C \times M : y = f(x)\}$ は **k -セル**である。
- $g, h : C \rightarrow \overline{M} \cup \{\pm\infty\}$ が definable 関数で, C 上 $g < h$ とする。このとき,
 $(g, h)_C := \{\langle x, y \rangle \in C \times M : g(x) < y < h(x)\}$ は $(k+1)$ -セルである。



Cell decomposition theorem (weakly o-minimal case)

Theorem 4.3 (Macpherson, Marker and Steinhorn, 2000)

構造 M の理論 $\text{Th}(M)$ が weakly o-minimal, $X \subseteq M^n$ を definable とする。
このとき, X はセル分解可能である。
つまり, $X = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_m$ となるセル $C_1, \dots, C_m$ が存在する。

$M = (M, <, +, \dots)$ を weakly o-minimal ordered abelian group とする。

Cut $\langle C, D \rangle$ が **non-valuational** であるとは,
 $\inf\{y - x : x \in C, y \in D\} = 0$ となることとする。

M が **non-valuational** であるとは,
任意の definable cut が non-valuational であることとする。

$M = (M, <, +, \dots)$ を weakly o-minimal ordered abelian group とする。

Cut $\langle C, D \rangle$ が **non-valuational** であるとは,
 $\inf\{y - x : x \in C, y \in D\} = 0$ となることとする。

M が **non-valuational** であるとは,
任意の definable cut が non-valuational であることとする。

Example 4.4 (non-valuational)

- $R_{alg} = \{a \in \mathbb{R} : a \text{ は } \mathbb{Q} \text{ 上代数的}\}.$
- $P = (-\pi, \pi) \cap R_{alg}.$
- $\mathcal{R} = (R_{alg}, <, +, \cdot, P).$

$\mathcal{R}$ は non-valuational weakly o-minimal ordered field である。

Example 4.5 (valuational)

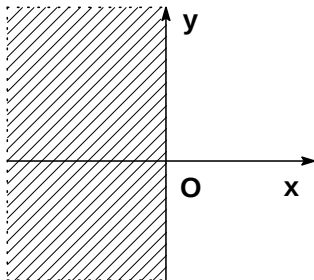
$P = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x \leq 0\}$, $\mathcal{M} = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, <, +, P)$ とする。

このとき, $\mathcal{M}$ は weakly o-minimal になる。

$\langle P, (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus P \rangle$ は cut である。

また, 任意の $a \in P$, $b \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus P$ に対して, $b - a > \langle 0, 1 \rangle$ となる。

それゆえ, $\langle P, (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus P \rangle$ は valuational cut である。



Remark 4.6

M が **non-valuational** ならば, $\overline{M}$ 上に $+$, $\cdot$ を自然に定義できる。
さらに $(M, <, +, \cdot)$ は, $(\overline{M}, <, +, \cdot)$ の部分順序体と思える。

$M = (M, <, +, \cdot, \dots)$ を non-valuational weakly o-minimal ordered field とする。

M と $\overline{M}$ 上にそれぞれ, 开区間を基本開集合として位相を入れる。

- $A \subseteq M$: 開集合
- $f : A \rightarrow \overline{M}$

とする。

f が点 $x \in A$ で微分可能とは,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \in \overline{M}$$

となることとする。

(C^r) 強セル C とその完備化 $\overline{C}$ を帰納的に定義する:

(C^r) 強セル C とその完備化 $\overline{C}$ を帰納的に定義する:

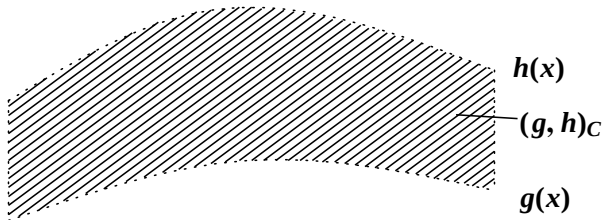
- $C = \{a\}$ は強 0-セルで, $\overline{C} := C$ とする。
- C が M の空でない definable open convex 集合ならば, 強 1-セルで, $\overline{C} := \{x \in \overline{M} : \exists a, b \in C, a < x < b\}$ とする。

次に、 $C \subseteq M^n$ を k -セルとする。

- $f : C \rightarrow M$ が definable で、連続な拡張 $\bar{f} : \bar{C} \rightarrow \bar{M}$ を持つとき、グラフ $\Gamma(f)$ は強 k -セルで、 $\overline{\Gamma(f)} := \Gamma(\bar{f})$ とする。

次に, $C \subseteq M^n$ を k -セルとする。

- $f : C \rightarrow M$ が definable で, 連続な拡張 $\bar{f} : \bar{C} \rightarrow \bar{M}$ を持つとき, グラフ $\Gamma(f)$ は強 k -セルで, $\overline{\Gamma(f)} := \Gamma(\bar{f})$ とする。
- $g, h : C \rightarrow \bar{M} \cup \{\pm\infty\}$ が definable で, 連続な拡張 $\bar{g}, \bar{h} : \bar{C} \rightarrow \bar{M} \cup \{\pm\infty\}$ を持ち, $\bar{C}$ 上 $\bar{g} < \bar{h}$ とする。このとき, $(g, h)_C := \{\langle a, b \rangle \in C \times M : g(a) < b < h(a)\}$ は強 $(k+1)$ -セル, $\overline{(g, h)_C} := \{\langle a, b \rangle \in \bar{C} \times \bar{M} : \bar{g}(a) < b < \bar{h}(a)\}$ とする。



特に f, g, h が C^r ならば, C は C^r 強セルとよぶ。

C をセル, $f : C \rightarrow \overline{M}$ を definable とする。

f が **強連続** であるとは,

f が連続な拡張 $\bar{f} : \overline{C} \rightarrow \overline{M}$ をもつこととする。

C をセル, $f : C \rightarrow \overline{M}$ を definable とする。

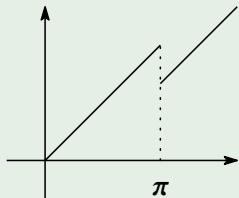
f が **強連続** であるとは,
 f が連続な拡張 $\bar{f} : \overline{C} \rightarrow \overline{M}$ をもつこととする。

Example 4.7

$\mathcal{R} = (R_{alg}, <, +, \cdot, P)$ 。ここで $P = (-\pi, \pi) \cap R_{alg}$ 。

$$f(x) := \begin{cases} x & x \in (0, \pi) \\ x - 1 & x \in (\pi, 5) \end{cases}$$

f は連続だが、強連続ではない。



Theorem 4.8 (強セル分解, Wencel, 2008)

M を non-valuational weakly o-minimal ordered group とする。

$A \subseteq M^n$ を definable とし, $f : A \rightarrow \overline{M}$ を definable とする。

このとき,

- ① A は強セル分解可能である。
- ② A のある強セル分解 $\mathcal{D}$ が存在して, 任意の $C \in \mathcal{D}$ に対して, $f|_C$ は強連続になる。

Theorem 4.9 (C^r 強セル分解, 田中・川上, 2007)

M を non-valuational weakly o-minimal ordered field とする。

$A \subseteq M^n$ を definable とし, $f : A \rightarrow \overline{M}$ を definable とする。

このとき,

- ① A は C^r 強セル分解可能である。
- ② A のある C^r 強セル分解 $\mathcal{D}$ が存在して, 任意の $C \in \mathcal{D}$ に対して, $f|_C$ は C^r かつ強連続になる。

Theorem 4.10 (Woerheide, 1996)

M を o-minimal ordered field とする。

このとき, simplicial homology と singular homology を考えることができる。

証明には, definable triangulation theorem を使う。

Question 4.11

Weakly o-minimal non-valuational ordered field のときも homology を考えることができるか。

Theorem 4.12 (van den Dries, 1998)

M を o-minimal ordered field とする。 $A \subseteq M^n$ を definable とする。
このとき、 M^n のある finite simplicial complex K が存在して、 A は
polyhedron $|K|$ と definably homeomorphic になる。

Definition 4.13

$a_0, a_1, \dots, a_k \in M^n$ を affine independent とする。

- $(a_0, \dots, a_k) := \{\sum t_i a_i : t_0, \dots, t_k > 0, \sum t_i = 1\}$ を **simplex** という。
- $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_l}\} \subseteq \{a_0, \dots, a_k\}$ とするとき, $(a_{i_0}, \dots, a_{i_l})$ を $(a_0, \dots, a_k)$ の **face** という。

Definition 4.13

$a_0, a_1, \dots, a_k \in M^n$ を affine independent とする。

- $(a_0, \dots, a_k) := \{\sum t_i a_i : t_0, \dots, t_k > 0, \sum t_i = 1\}$ を **simplex** という。
- $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_l}\} \subseteq \{a_0, \dots, a_k\}$ とするとき, $(a_{i_0}, \dots, a_{i_l})$ を $(a_0, \dots, a_k)$ の **face** という。
- M^n の simplex のある有限集合 K が **finite simplicial complex** であるとは, 任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ に対して, $\text{cl}(\sigma_1) \cap \text{cl}(\sigma_2) = \emptyset$ または $\text{cl}(\sigma_1) \cap \text{cl}(\sigma_2) = \text{cl}(\tau)$ となる σ_1 と σ_2 の共通の face τ が存在することとする。
- Finite simplicial complex K に対して, $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ を **polyhedron** という。

References (o-minimal)

- [1] van den Dries, Lou. *Tame topology and o-minimal structures*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 248. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [2] Knight, Julia F.; Pillay, Anand; Steinhorn, Charles. *Definable sets in ordered structures. II*. Trans. Amer. Math. Soc. 295 (1986), no. 2, 593–605.
- [3] Pillay, Anand; Steinhorn, Charles. *Definable sets in ordered structures. I*. Trans. Amer. Math. Soc. 295 (1986), no. 2, 565–592.
- [4] Pillay, Anand; Steinhorn, Charles. *Definable sets in ordered structures. III*. Trans. Amer. Math. Soc. 309 (1988), no. 2, 469–476.
- [5] Woerheide, Arthur Anderson. *O-minimal homology*. Thesis (Ph.D.) University of Illinois at Urbana-Champaign. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1996.

References (weakly o-minimal)

- [1] R. D. Arefiev, *On the property of monotonicity for weakly o-minimal structures*, in **Algebra and model theory II**, edited by A. G. Pinus and K. N. Ponomarev, Novosibirsk, 1997, 8-15.
- [2] Baizhanov, Bektur Sembiuly. *Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates*. **J. Symbolic Logic** 66 (2001), no. 3, 1382–1414.
- [3] Macpherson, Dugald; Marker, David; Steinhorn, Charles. *Weakly o-minimal structures and real closed fields*. **Trans. Amer. Math. Soc.** 352 (2000), no. 12, 5435–5483
- [4] Tanaka, Hiroshi; Kawakami, Tomohiro. *C^r strong cell decompositions in non-valuational weakly o-minimal real closed fields*. **Far East J. Math. Sci. (FJMS)** 25 (2007), no. 3, 417–431.

References (weakly o-minimal)

- [1] Wencel, Roman. *Weakly o-minimal nonvaluational structures*. **Ann. Pure Appl. Logic** 154 (2008), no. 3, 139–162.
- [2] Wencel, Roman. *Topological properties of sets definable in weakly o-minimal structures*. **J. Symbolic Logic** 75 (2010), no. 3, 841–867.