Definably complete structures and Baire strutures

田中 広志

阿南工業高等専門学校 一般教科

数学基礎論サマースクール

2011 年 8 月 30 日

於神戸大学

Outline

この発表ではいつも，
$\mathbb{K} = (\mathbb{K}, <, +, \cdot, \ldots)$ を順序体とする。
また **definable** と書いたときは，パラメータを含んでよいとする。

Definition 1.1

$\mathbb{K}$ が definably complete であるとは，
任意の definable 集合 $A \subseteq \mathbb{K}$ は，$\mathbb{K} \cup \{\pm\infty\}$ において上限と下限を持つとする。

Definably complete structures

$\varphi(x, y)$ を論理式とする。

ただし，$x = (x_1, \ldots, x_n)$ を n 変数，y を 1 変数とする。

このとき，上に有界の場合に上限を持つという公理は

$$\forall x(\exists z \forall y(\varphi(x, y) \to y \le z) \to \exists z(\forall y(\varphi(x, y) \to y \le z) \\ \wedge \forall t \forall y(\varphi(x, y) \to y \le t) \to z \le t))$$

と書ける。したがって，**definable completeness** は，**elementary equivalence** において保存される。

Definition 1.2

- $A \subseteq \mathbb{K}$ が $\mathbb{K}$ の convex 集合であるとは,
  任意の $a, b \in A$ に対して，$(a, b) \subseteq A$ となることである。
- さらに $\sup A, \inf A \in \mathbb{K} \cup \{\pm\infty\}$,
  のとき，A は $\mathbb{K}$ の interval という。

Interval topology

$\mathbb{K}$ には **open interval** を基本開集合とした位相が入っていると考える。
また，$\mathbb{K}^n$ には $\mathbb{K}$ の直積位相が入っているとする。

O-minimal (weakly o-minimal) 構造

Definition 1.3

- $\mathbb{K}$ が o-minimal であるとは,
  任意の definable 集合 $A \subseteq \mathbb{K}$ は, interval の有限和で表せることとする。
- $\mathbb{K}$ が weakly o-minimal であるとは,
  任意の definable 集合 $A \subseteq \mathbb{K}$ は, convex 集合の有限和で表せることとする。

Examples

Example 1.4

- 実数体 $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, \ldots)$ は definably complete である。
- O-minimal 構造はすべて definably complete である。
- 有理数体 $(\mathbb{Q}, <, +, \cdot)$ は definably complete ではない。
  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ は $\mathbb{Q}$ において，上限を持たない。

Definably connected sets

Definition 1.5

Definable 集合 $A \subseteq \mathbb{K}^n$ が definably connected であるとは,
A が A の二つの definable かつ空でない disjoint 開部分集合の和で表せれないこととする。

Definition 1.5

Definable 集合 $A \subseteq \mathbb{K}^n$ が definably connected であるとは，A が A の二つの definable かつ空でない disjoint 開部分集合の和で表せれないこととする。

Proposition 1.6 (Miller, 2001)

$\mathbb{K}$ を definably complete とする。$A \subseteq \mathbb{K}^m$ を definably connected とし，$f : A \to \mathbb{K}^n$ を definable かつ continuous とする。このとき，$f(A)$ も definably connected になる。

この定理は，位相空間論における「連結集合の連続写像による像はまた連結になる」ということの **definable version** である。

Intermediate value property

Definition 2.1

$\mathbb{K}$ が intermediate value property をもつとは，
任意の $a, b \in \mathbb{K}$ で $a < b$ に対して，任意の definable な連続関数
$f : [a, b] \to \mathbb{K}$ は $f(a)$ と $f(b)$ の間のすべての $\mathbb{K}$ の値をとることとする。

Intermediate value property

Definition 2.1

$\mathbb{K}$ が intermediate value property をもつとは,
任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{K}$ で $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ に対して，任意の definable な連続関数 $\boldsymbol{f} : [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{K}$ は $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ と $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ の間のすべての $\mathbb{K}$ の値をとることとする。

Theorem 2.2 (Miller, 2001)

次は同値である。

1. $\mathbb{K}$ は intermediate value property をもつ。
2. $\mathbb{K}$ は definable complete である。
3. $\mathbb{K}$ の任意の interval は definably connected である。
4. $\mathbb{K}$ は definably connected である。

定理 2.2 の証明

$\mathbb{K}$ が **intermediate value property** をもつならば，**definable complete** であることを示す。

定理 2.2 の証明

$\mathbb{K}$ が **intermediate value property** をもつならば，**definable complete** であることを示す。

Proof.

$A \subseteq \mathbb{K}$ を空でなく **definable** かつ下に有界とする。

A を $\{y \in \mathbb{K} : \exists x \in A,\ x \leq y\}$ と取り替えることで，A は **convex** かつ上に有界でないとしておく。$\inf A \in \mathbb{K}$ を示す。

定理 2.2 の証明

$\mathbb{K}$ が **intermediate value property** をもつならば，**definable complete** であることを示す。

Proof.

$A \subseteq \mathbb{K}$ を空でなく **definable** かつ下に有界とする。

A を $\{y \in \mathbb{K} : \exists x \in A,\ x \leq y\}$ と取り替えることで，A は **convex** かつ上に有界でないとしておく。$\inf A \in \mathbb{K}$ を示す。

$\min A$ または $\max(\mathbb{K} \setminus A)$ が存在すれば，証明は終わる。もし，ともに存在しないとすると，A と $\mathbb{K} \setminus A$ は開集合となる。$a, b \in \mathbb{K}$ かつ $a < b$ とする。このとき，$f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ を

$$f(x) = \begin{cases} a & (x \notin A) \\ b & (x \in A) \end{cases}$$

と定義すると，f は **definable** かつ連続になる。これは，$\mathbb{K}$ が **intermediate value property** をもつことに矛盾する。 □

定理 2.2 の証明

$\mathbb{K}$ が **definably connected** ならば，**intermediate value property** をもつことを示す。

定理 2.2 の証明

$\mathbb{K}$ が **definably connected** ならば，**intermediate value property** をもつことを示す。

Proof.

$f : [a, b] \to \mathbb{K}$ を **definable** 連続関数とし，$f(a) < f(b)$ とする。
$c \in (f(a), f(b))$ とする。

定理 2.2 の証明

$\mathbb{K}$ が definably connected ならば，intermediate value property をもつことを示す。

Proof.

$f : [a, b] \to \mathbb{K}$ を definable 連続関数とし，$f(a) < f(b)$ とする。
$c \in (f(a), f(b))$ とする。
f の拡張として $F : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ を

$$F(x) = \begin{cases} f(a) & (x < a) \\ f(x) & (a \leq x \leq b) \\ f(b) & (b < x) \end{cases}$$

と定義すると，F は definable かつ連続である。
$F^{-1}((-\infty, c))$ と $F^{-1}((c, \infty))$ は，disjoint definable open である。$\mathbb{K}$ が definably connected であるので，$F^{-1}(c) \neq \emptyset$ つまり $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ である。
よって，$\mathbb{K}$ は intermediate value property をもつ。 □

定理 **2.2** より，次のことが成り立つ。

Corollary 2.3

$\mathbb{K}$ が definably complete ならば，real closed field である。

Definition 2.4

順序体 $\mathbb{K}$ が実閉体であるとは，次のどれかひとつが成り立つことである。

1. 任意の 1 変数多項式 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ と任意の $a < b \in \mathbb{K}$ に対して，$f(a)f(b) < 0$ ならば $f(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在する。
2. $\mathbb{K}(i)$ は代数閉体である。
3. 任意の $a \in \mathbb{K}$ に対して，$a > 0$ ならば $\sqrt{a} \in \mathbb{K}$ かつ，任意の奇数次の 1 変数多項式は $\mathbb{K}$ で解をもつ。

Definably compact sets

Definition 2.5 (Peterzil and Steinhorn, 1999)

Definable 集合 $A \subseteq \mathbb{K}^n$ が definably compact であるとは,
A が $\mathbb{K}^n$ で (topologically) closed かつ bounded であることとする。

Definably compact sets

Definition 2.5 (Peterzil and Steinhorn, 1999)

Definable 集合 $A \subseteq \mathbb{K}^n$ が definably compact であるとは,
A が $\mathbb{K}^n$ で (topologically) closed かつ bounded であることとする。

Proposition 2.6 (Weak Definable Choice, Miller, 2001)

$A \subseteq \mathbb{K}^{m+n}$ を definable かつ, 任意の $x \in \mathbb{K}^m$ に対して,
$A_x := \{y \in \mathbb{K}^n : \langle x, y\rangle \in A\}$ が definably compact とする。このとき,
$\mathrm{Graph}(f) \subseteq A$ となる definable 写像 $f : \pi(A) \to \mathbb{K}^n$ が存在する。
ここで, $\pi : \mathbb{K}^{m+n} \to \mathbb{K}^m$ は射影とする。

Definably compact sets

Theorem 2.7 (Miller, 2001)

$\mathbb{K}$ を definably complete とする。$A \subseteq \mathbb{K}^m$ を definably compact とし，$f : A \to \mathbb{K}^n$ を definable かつ continuous とする。このとき，$f(A)$ も definably compact になる。

この定理は，位相空間論における「コンパクト集合の連続写像による像はまたコンパクトになる」ということの **definable version** である。

Theorem 2.8 (Max-min theorem)

$\mathbb{K}$ を definably complete とする。$A \subseteq \mathbb{K}^n$ を definably compact とし，$f : A \to \mathbb{K}$ を definable 連続関数とする。このとき，f は A 上最大値と最小値を持つ。

Definition 2.9

Definable 関数 $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ が $x \in \mathbb{K}$ で微分可能とは,
$\lim_{t \to 0} \dfrac{f(x+t) - f(x)}{t} \in \mathbb{K}$ となることとする。

同様に C^1 関数等も定義できる。

Proposition 2.10 (Servi, 2008)

$\mathbb{K}$ を definably complete とする。$a, b \in \mathbb{K}$ とし, $f : (a, b) \to \mathbb{K}$ を definable C^1 関数とする。任意の $x \in (a, b)$ に対して, $f'(x) > 0$ とする。このとき, f は (a, b) 上 stricly increasing である。

Definable family

Definition 3.1

$S \subseteq \mathbb{K}^{m+n}$ と を definable とする。$a \in \mathbb{K}^m$ とする。
$S_a := \{x \in \mathbb{K}^n : \langle a, x \rangle \in S\}$ とする。
このとき，$(S_a)_{a \in \mathbb{K}^m}$ を definable family という。

Definition 3.1

$S \subseteq \mathbb{K}^{m+n}$ と を definable とする。$a \in \mathbb{K}^m$ とする。
$S_a := \{x \in \mathbb{K}^n : \langle a, x\rangle \in S\}$ とする。
このとき，$(S_a)_{a\in\mathbb{K}^m}$ を definable family という。

特に $S \subseteq \mathbb{K}^{1+n}$ のとき，
$(S_a)_{a\in\mathbb{K}}$ が definable increasing family であるとは，
任意の $a, b \in \mathbb{K}$ に対して，$a \leq b$ ならば，$S_a \subseteq S_b$ となることとする。
同様に，definable decreaing family も定義できる。

Definition 3.2

$X \subseteq Y \subseteq \mathbb{K}^n$ とし，Y は definable とする。

1. X が Y で nowhere dense であるとは，
   $\mathbf{int}_Y(\mathbf{cl}_Y(X)) = \emptyset$ となることとする。
2. X が Y で definably meager であるとは，
   $X \subseteq \bigcup_{t \in \mathbb{K}} A_t$ となる Y の nowhere dense な definable increasing family $(A_t)_{t \in \mathbb{K}}$ が存在することとする。
3. X が Y で definably residual であるとは，
   $Y \setminus X$ が definably meager になることとする。

Remark 3.3

Definably meager set は definable である必要はない。

Topologically meager sets

Definition 3.4

X を位相空間とし，$A \subseteq X$ とする。

1. A が X で topologically meager であるとは，
$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ となる X の nowhere dense 集合 A_n $(n \in \mathbb{N})$ が存在することとする。
2. A が X で topologically residual であるとは，
$X \setminus A$ が topologically meager になることとする。

Examples

Example 3.5

1. $\mathbb{R}$ において Cantor 集合は nowhere dense である。
2. $\mathbb{R}$ において $\mathbb{Q}$ は nowhere dense ではないが，topologically meager である。

Definition 3.6

$\mathbb{K}$ を definably complete とする。$Y \subseteq \mathbb{K}^n$ とし，Y は definable とする。
Y が definably Baire であるとは，
Y の空でない definable 開部分集合は，Y で definably meager ではない。

Remark 3.7

$n \in \mathbb{N}$ とする。
$\mathbb{K}^n$ は definably Baire $\iff$ $\mathbb{K}^n$ は $\mathbb{K}^n$ で definably meager でない

Definition 3.8 (Fornasiero and Servi, 2010)

$\mathbb{K}$ が definably complete Baire structure であるとは,
$\mathbb{K}$ は definably complete かつ definably Baire となることとする。

Definably complete Baire structure は，**elementary equivalence** において保存される。

Topologically Baire spaces

Definition 3.9

位相空間 X が Baire 空間であるとは,
稠密な開集合の可算個の共通集合が X で稠密であることとする。

Theorem 3.10

位相空間 X において以下は同値である。

1. X は Baire 空間である。
2. X の空でない開集合は X において topologically meager ではない。

Theorem 3.11 (Baire category theorem)

完備距離空間は Baire 空間である。

$\mathbb{Q}$ は **Baire** 空間でない。

1. $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, \ldots)$ においては，$X \subseteq \mathbb{R}^n$ が **topologically Baire** ならば，X は $\mathbb{R}^n$ の **definably Baire** である。
2. $\tilde{\mathbb{R}} := (\mathbb{R}, <, +, \cdot, (A)_{A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n})$ とする。
   $\tilde{\mathbb{R}}$ においては，**definably Baire** と **topologically Baire** は一致する。

Definably complete Baire structures

Example 3.12

1. $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, \ldots)$ は definably complete Baire structure である。
2. O-minimal structure は definably complete Baire structure である。

Definably complete Baire structures

Example 3.12

1. $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, \ldots)$ は definably complete Baire structure である。
2. O-minimal structure は definably complete Baire structure である。

Proof.

O-minimal 構造の definable nowhere dense 部分集合は，有限集合である。（無限集合の場合，o-minimal の定義より open interval を含むことになる。）

Example 3.12

1. $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, \ldots)$ は definably complete Baire structure である。
2. O-minimal structure は definably complete Baire structure である。

Proof.

O-minimal 構造の definable nowhere dense 部分集合は，有限集合である。（無限集合の場合，o-minimal の定義より open interval を含むことになる。）
O-minimal 構造の有限集合の definable family は，uniformly finite である。
よって，open interval を nowhere dense 集合の definable increasing family の和で覆えない。
O-minimal structure は definably complete Baire structure である。 □

Theorem 3.13 (Knight, Pillay and Steinhorn, 1986)

M を o-minimal とする。
$Y \subseteq M^{n+1}$ を definable とし，任意の $x \in M^n$ に対して，
$Y_x = \{y \in M : \langle x, y \rangle \in Y\}$ が有限とする。
このとき，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $x \in M^n$ に対して，$|Y_x| \leq N$ が成り立つ。

Example 3.14

$\mathbf{exp_1} := \mathbf{exp}$ とし，$\mathbf{exp}_{n+1} := \mathbf{exp}(\mathbf{exp}_n)$ と定義する。
言語 $L := \{<, +, \cdot, f\}$ とする。
$\mathbb{R}(\mathbf{exp}_n) := (\mathbb{R}, <, +, \cdot, \mathbf{exp}_n)$ において，f の解釈を $\mathbf{exp}_n$ とすることで，L-構造とする。
$M(f)$ を $(\mathbb{R}(\mathbf{exp}_n) : n \in \mathbb{N}_+)$ のある nonprincipal ultraproduct とする。このとき，各 $\mathbb{R}(\mathbf{exp}_n)$ は o-minimal なので，$M(f)$ は definably complete Baire structure になる。

$M(f)$ が **o-minimal** であるかどうかは知られていない。もし，**o-minimal** ならば **exponentially bounded** でない **o-minimal** 構造の最初の例となる。

Conjecture 3.15 (Fornasiero and Servi, 2010)

任意の definably complete structure は definably Baire である。

Definably complete Baire structures

Conjecture 3.15 (Fornasiero and Servi, 2010)

任意の definably complete structure は definably Baire である。

Theorem 3.16 (Hieronymi)

上記の conjecture は正しい。

An application of Baire category theorem

Theorem 3.17 (Weierstrass)

$\mathbb{R}$ において，$\mathbf{[0,1]}$ 上各点で連続かつ微分不可能な関数が存在する。

References

[1] **Fornasiero, Antongiulio; Servi, Tamara.** *Definably complete Baire structures.* **Fund. Math. 209 (2010), no. 3, 215–241.**

[2] **Hieronymi, Philipp.** *An analogue of the Baire Category Theorem.* **preprint.**

[3] **Knight, Julia F.; Pillay, Anand; Steinhorn, Charles.** *Definable sets in ordered structures. II.* **Trans. Amer. Math. Soc. 295 (1986), no. 2, 593–605.**

[4] **Miller, Chris.** *Expansions of dense linear orders with the intermediate value property.* **J. Symbolic Logic 66 (2001), no. 4, 1783–1790.**

[5] **Peterzil, Ya'acov; Steinhorn, Charles.** *Definable compactness and definable subgroups of o-minimal groups.* **J. London Math. Soc. (2) 59 (1999), no. 3, 769–786.**

References

[1] **Servi, Tamara.** *Noetherian varieties in definably complete structures.* **Log. Anal. 1 (2008), no. 3-4, 187–204.**

[2] 三村護・吉岡巌，位相数学入門，培風館，**1995.**

[3] 堀内利郎・下村勝孝，関数解析の基礎 ∞次元の微積分，内田老鶴圃，**2005.**