群の構成定理の一般化について

田中　勇一

神戸大学院 CS32 研究室 M2

2011 年 8 月 30 日 数学基礎論サマースクール

目次

記号

記号

- f, g,...:関数記号；c, d,...:定数記号；R, S,...:関係記号
- x, y,...:変数記号；$\bar{x}, \bar{y}$,...:変数の組
- L:言語；$\phi(\bar{x})$,...:L-論理式
- M, N,...:構造
- A, B,...:領域；a, b,...:領域の元；$\bar{a}, \bar{b}$,...:元の組
- $X, U \subset A^n$,...:定義可能集合 (パラメーターは任意)

約束.

特に断らない限り, 定義可能集合と論理式を同一視する.

翻訳可能性

定義.(翻訳可能集合)

構造 $M = (A; f, c, R, \ldots)$,
$U \subset A^n$:定義可能集合,
$E \subset A^{2n}$:定義可能集合で,U 上の同値関係を定める
について,

$$U/E := \{a/E : a \in U \wedge a/E : E - class\} \tag{1}$$

の形の集合を,**翻訳可能集合**という.

翻訳可能性

定義.(翻訳可能性 (interpretable))

構造 $M = (A; f, c, R, ...)$,$N = (B; g, d, S, ...)$ について,
M で N が**翻訳可能 (interpretable)** であるとは,

- U/E:翻訳可能集合 ; $f : U/E \to B$ を全単射写像
- $\grave{g}, \grave{S}$:M の定義可能集合 ; $\grave{d}$:A の元

が存在し, 任意の $\{g, c, d, ...\}$-原始論理式 $\phi(x_1, ..., x_l)$ について,

- $g, d, S, ...$ を $\grave{g}, \grave{d}, \grave{S}, ...$; $x_1 = x_2$ を $\bar{x_1} E \bar{x_2}$

と ϕ の中の記号を置き換えて得られる $\{f, c, R, ...\}$-論理式を $\grave{\phi}(\bar{x_1}, ..., \bar{x_l})$ とするとき, $\forall \bar{a_1}, ..., \bar{a_l} \in U$ について,

$$N \models \phi(f(\bar{a_1}/E), ..., f(\bar{a_l}/E)) \Leftrightarrow M \models \grave{\phi}(\bar{a_1}, ..., \bar{a_l}).$$

順序極小構造

定義.(順序極小構造 (o-minimal structure))

構造 $M = (A; <, \dots)$ が**順序極小**とは,

- 二項関係 $<$ は, 集合 A 上の線形順序関係,
- 任意の一変数の論理式 $\phi(x)$ に対し,
  $a_i, b_i \in A \cup \{\pm\infty\}, c_j \in A$ が存在し,

$$\{a \in A : M \models \phi(a)\} = \bigcup_{i \leqslant n} (a_i, b_i) \cup \bigcup_{j \leqslant m} \{c_j\}.$$

が成立することをいう. なお,$(a_i, b_i) := \{x \in A : a_i < x < b_i\}$ である.

順序極小構造

定義.(順序極小構造 (o-minimal structure))

構造 $M = (A; <, \ldots)$ が**順序極小**とは,

- 二項関係 $<$ は, 集合 A 上の線形順序関係,
- 任意の一変数の論理式 $\phi(x)$ に対し,
  $a_i, b_i \in A \cup \{\pm\infty\}, c_j \in A$ が存在し,

$$\{a \in A : M \vDash \phi(a)\} = \bigcup_{i \leqslant n} (a_i, b_i) \cup \bigcup_{j \leqslant m} \{c_j\}.$$

が成立することをいう. なお,$(a_i, b_i) := \{x \in A : a_i < x < b_i\}$ である.

Example

実数体 $(\mathbb{R}; <, +, \cdot, 0, 1)$ は, 順序極小である.

順序極小構造の性質:セル分解

定義.(セル)

$M = (A; <, \ldots)$:順序極小構造について,n-セルを帰納的に定義する.

1. 一点集合 $\{c\}$ は 0-セルである.
2. 区間 (a, b) は 1-セルである.
3. X:n-セル, 定義可能関数 $f : X \to A$ に対し,f のグラフは n-セル.
4. X:n-セル, 定義可能関数 $f, g : X \to A$ で,$\forall \bar{x}, f(\bar{x}) < g(\bar{x})$ なら, $\{\langle \bar{x}, y\rangle \in X \times A : f(\bar{x}) < y < g(\bar{x})\}$ は $(n+1)$-セル.

定理.(セル分解定理の系)

定義可能集合 $X \subset A^n$ は,m-セルの有限和 ($m \leq n$ は動く) にかける.

順序極小構造の性質:次元

定義.(定義可能集合の次元)

定義可能集合の次元を,n-セルの有限和 (n は動く) に表示したときの最大の n とする.

この次元を用い, 順序極小構造の曲線, 曲線族が定義できる.

定義.(定義可能曲線族)

- 定義可能集合 $X \subset A^2$ が次元 1 のとき曲線という.
- 定義可能集合 $X \subset A^2 \times A^m$ について,$\forall \bar{a} \in A^2, \{\bar{x} \in A : \langle \bar{x}, \bar{a} \rangle \in X\}$ が曲線もしくは空集合のとき, X を曲線族という. また, 曲線族 X のパラメーターの次元を X の次元-1 と定める.

翻訳可能集合の次元 [Y.Peterzil 1993] や, 翻訳可能曲線族も定義できる.

順序極小構造の幾何的性質

順序極小構造の翻訳可能曲線族 (interpretable family of curves) に関して, 自明な次の三択が成り立つ.

順序極小構造の幾何的性質

順序極小構造の翻訳可能曲線族 (interpretable family of curves) に関して, 自明な次の三択が成り立つ.

命題.(幾何構造の三択)

順序極小構造 $M = (A; <, \ldots)$ について次のいずれかが成立.

- Z1. 正規翻訳可能曲線族は, 有限個を除いて,$\{a\} \times A$, $A \times \{b\}$ 型の直線の組み合わせとなる曲線の族である. ex.$(\mathbb{R}; <)$
- Z2. 全ての正規翻訳可能曲線族のパラメーターの次元は 1 以下であり, かつ,Z1 では無い. ex.$(\mathbb{R}; <, +, 0)$
- Z3. 1 より大きい次元のパラメーターをもつ正規翻訳可能曲線族が存在する. ex.$(\mathbb{R}; <, +, \cdot, 0, 1)$

順序極小構造の三択定理

モデル理論的な条件の下で, 局所的な幾何構造の三択は代数構造の翻訳可能性の三択に対応する.

定理.(順序極小構造での三択定理)[Y.Peterzil,S.Starchenko 1997]

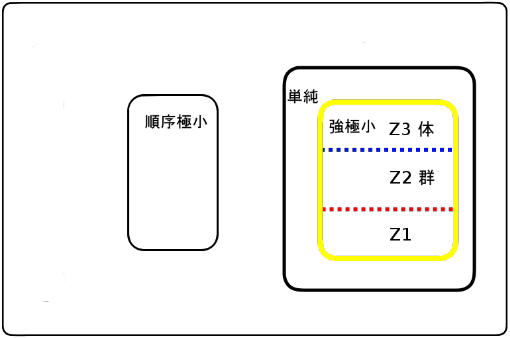
ω_1-飽和な順序極小構造 $M = (A; <, \dots)$ と A の元 x について次の三択が成立する.

- T1. x の凸開近傍 C に対し,M から導入される構造 $M|C$ は群構造を持たない.
- T2. x の凸開近傍 C で,M から導入される構造 $M|C$ が, ある順序斜体上の順序線形空間となるものが存在.
- T3. x の凸開近傍 C で,M から導入される構造 $M|C$ が, 実閉体の順序極小拡大となるものが存在.

三択定理の周辺の結果

予想. [B.Zil'ber 1984]

強極小構造で三択定理が成り立つか?

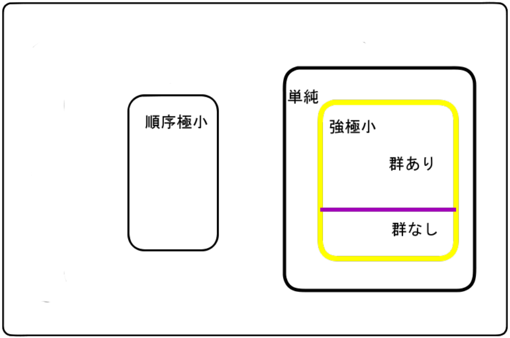


モデルのクラス図

三択定理の周辺の結果

定理.(群の構成)[B.Zil'ber 1984]

強極小構造で非自明な幾何条件 (Z2,Z3) から群が翻訳可能.

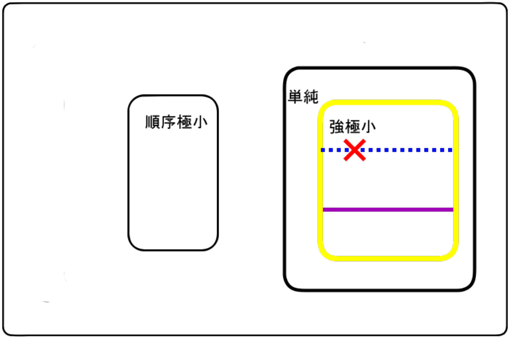


モデルのクラス図

三択定理の周辺の結果

定理. [E.Hrushovski 1993]

強極小構造下で三択定理の反例が存在.

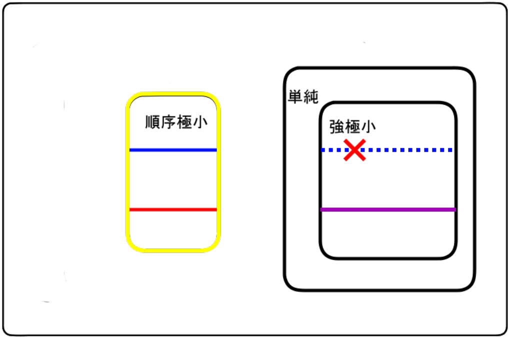


モデルのクラス図

三択定理の周辺の結果

定理. [Y.Peterzil, S.Starchenko 1997]

順序極小構造において三択定理が成立.

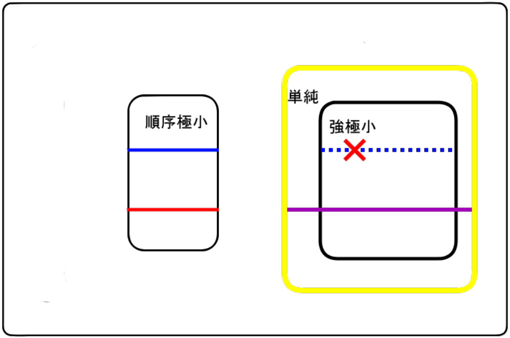


モデルのクラス図

三択定理の周辺の結果

定理. [I.Tomašić, F.O.Wagner 2003]

単純構造について, 群の構成定理が成立.

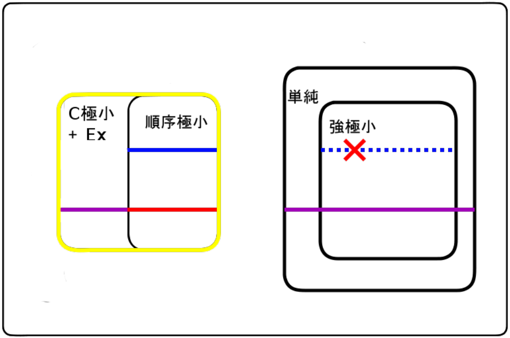


モデルのクラス図

三択定理の周辺の結果

定理.[F.Maalouf 2008]

C-極小構造が,ExchangeProperty を持つとき, 群の構成定理が成立.



モデルのクラス図

順序極小の弱化概念

本研究は，単純構造における群構成定理の順序構造での類似を目指す．

順序極小の弱化概念

本研究は, 単純構造における群構成定理の順序構造での類似を目指す.
そのためには順序極小構造の弱化概念が必要となる.

順序極小の弱化概念

本研究は，単純構造における群構成定理の順序構造での類似を目指す．
そのためには順序極小構造の弱化概念が必要となる．

定義.(局所順序極小構造)[C.Toffalori, K.Vozoris 2008]

構造 $M = (A; <, \ldots)$ が局所順序極小とは，次を満たすときにいう．

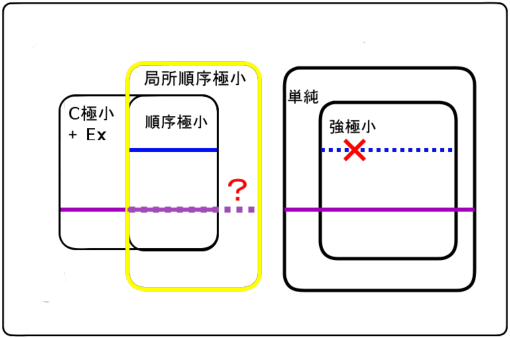
- 二項関係 $<$ は，集合 A 上の線形順序関係，
- 任意の一変数論理式 $\phi(x)$，及び，
  任意の点 $x \in A$ について，区間 $I \ni x$ が存在して，
  $a_i, b_i \in A \cup \{\pm\infty\}, c_j \in A$ が存在し，

$$I \cap \{a \in A : M \models \phi(a)\} = I \cap \left(\bigcup_i (a_i.b_i) \cup \bigcup_j \{c_j\} \right).$$

問題

問.1

構造 $M = (A; <, \ldots)$ が局所順序極小とし, その中の非自明な幾何構造をもつ開近傍において群構造が翻訳できるか?



モデルのクラス図

問題

問.1

構造 $M = (A; <, \ldots)$ が局所順序極小とし, その中の非自明な幾何構造をもつ開近傍において群構造が翻訳できるか?

順序極小構造の三択定理 [Y.Peterzil,S.Starchenko 1997] の群構成定理の部分は, 次の三段階からなる.

1. 自明な幾何構造 (trivial geometry) $\leftrightarrow$ 論理式が二変数論理式の論理結合に同値 (binary theory) [A.Merkler,M.Rubin,C.Steinhorn 1992]
2. 本質的に三変数以上の論理式の存在から, 正規翻訳可能曲線族で良い性質のものを構成.
3. 良い性質をもつ正規翻訳可能曲線族から順序群の構造を定義する.

問題

問.2

構造 $M = (A; <, \ldots)$ が局所順序極小とし, 自明な幾何構造の条件の特徴づけを与えよ.

問題

問.2

構造 $M = (A; <, \ldots)$ が局所順序極小とし, 自明な幾何構造の条件の特徴づけを与えよ.

Example

$$
\begin{aligned}
N &:= \{0,1\} \times \mathbb{R} \\
(n,p)R(m,q) &:\leftrightarrow \begin{cases} p = q \wedge n = m, & if n = 1 \\ p - q \in \mathbb{Z}, & if n = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

とし N に辞書式順序 $<$ を入れる.
$(N; <, R)$ **は, 非自明な幾何構造を持ち, かつ** binary **となる.**

問題

問.2

構造 $M = (A; <, \ldots)$ が局所順序極小とし, 自明な幾何構造の条件の特徴づけを与えよ.

Example

$$\begin{array}{rcl} N & := & \{0,1\} \times \mathbb{R} \\ (n,p)R(m,q) & :\leftrightarrow & \begin{cases} p = q \wedge n = m, & if n = 1 \\ p - q \in \mathbb{Z}, & if n = 0 \end{cases} \end{array}$$

とし N に辞書式順序 $<$ を入れる.
$(N; <, R)$ は, 非自明な幾何構造を持ち, かつ binary となる.

よって, 局所順序極小では binarity と自明な幾何性が分離される.
なお, この例は $(\mathbb{R}; <, sin)$ と双定義可能である.

問題

局所順序極小性における自明性についての問題

1. 自明性 $\Rightarrow$binarity?
2. binarity$\Rightarrow$ 群の翻訳不可能性?
3. 局所的に,binarity と自明性の対応は存在しないか?

問題

局所順序極小性における自明性についての問題

1. 自明性 $\Rightarrow$binarity?
2. binarity$\Rightarrow$ 群の翻訳不可能性?
3. 局所的に,binarity と自明性の対応は存在しないか?

この二番目の問題について, 三つの問題に分ける.

1. 一変数関数のみをもった構造での群の定義不可能性
2. binary relation の一変数定義可能関数による特徴づけ
3. binarity の下での仮想元消去 (翻訳可能性を定義可能性へ帰着)

問題

問.3

構造 $M = (\mathbb{R}; <, f)$ **が局所順序極小となるときの必要十分条件は?**

問題

問.3

構造 $M = (\mathbb{R}; <, f)$ が局所順序極小となるときの必要十分条件は?

命題.1

$M = (\mathbb{R}; <, f)$ が局所順序極小ならば,f は局所区分的に連続狭義単調もしくは定数関数となる.

系.

$M = (\mathbb{R}; <, f)$ が局所順序極小とするとき,$\mathbb{R}$ の区間か一点集合への局所有限分割 $\{J_i\}$ があり, f は J_i 上連続狭義単調もしくは定数関数となる.

以後,f についてこの分割 $\{J_i\}$ を固定しておく.

問題

命題.2

$M = (\mathbb{R}; <, f)$:局所順序極小とするとき,$\mathbb{R}$ の任意の有界区間 J 及び自然数 n について，J の f^n による像は有限個の J_i の和に含まれる.

Example

$$J_0 := (-\infty, 0), J_{2n+1} := \{n\}, J_{2n+2} := (n, n+1).$$

$$f(x) := \begin{cases} -x, & if \quad x \in J_0 \\ -\frac{1}{x}, & if \quad x \in J_{2n+1} \\ 0, & else \end{cases}$$

この $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は, 命題.2 の $n = 2$ の場合の条件に反し,$(\mathbb{R}; <, f)$ は局所順序極小ではない.

$$\{x \in J_2 : 0 = f^3(x)\} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \omega\right\}.$$

問題

命題.3

$M = (\mathbb{R}; <, f)$:局所順序極小とするとき，f 及び自然数 $n > 0$ に対し，$\{x \in \mathbb{R} : f^n(x) = x\}$ は局所的に区間と点の有限和となる．

Example

$$J_0 := (-\infty, 0], J_1 := (0, 1), J_2 := \{1\}, J_3 := (1, 2), J_4 := [2, \infty).$$

$$f(x) := \begin{cases} x + 1, & if \quad x \in J_1 \\ \frac{1}{[(x-1)^{-1}] + ((x-1)^{-1} - [(x-1)^{-1}])^2}, & if \quad x \in J_3 \\ 0, & else \end{cases}$$

$(\mathbb{R}; <, f)$ は命題.1,2 の条件は満たすが，命題.3 の $n = 2$ の場合に反し，局所順序極小構造ではない．

問題

命題.4

$M=(\mathbb{R};<,f)$:局所順序極小とするとき，有界区間 J と自然数 n について $y_0,\ldots,y_l\in J$ が，

- $\forall J_i, J_i$:singleton,$f^n(J_i)\in J\longrightarrow f^n(J_i)\in\{y_0,\ldots,y_l\}$
- $\forall I, I$:interval,f^n is constant functioin on $I, f^n(I)\in J\longrightarrow f^n(I)\in\{y_0,\ldots,y_l\}$

が成立するようにとれる．

問題

Example

$$J_{2n} := \{n\}, J_{2n+1} := (n, n+1).$$

$$f(x) := \begin{cases} |\frac{1}{x}|, & if \quad x \in J_{2n}, n \neq 0 \\ x, & else \end{cases}$$

$(\mathbb{R}; <, f)$ は命題.1,2,3 の条件は満たすが, 命題.4 に反し, 局所順序極小構造ではない.

問題

予想.(十分性)

$\mathbb{R}$ 上の一変数関数 f が次の性質を持つとする.
$\mathbb{R}$ の区間ないし点への局所有限分割 $\{J_i\}$ が存在し,

- f は各 J_i 上, 連続狭義単調, もしくは定数関数である.
- 自然数 n に対し, 任意の有界区間 $J \subset \mathbb{R}$ の f^n による像は有限個の J_i の和に含まれる.
- 自然数 n に対し,$\{x \in \mathbb{R} : f^n(x) = x\}$ は局所的に区間と点の有限和となる.
- 命題 4 の条件

このとき,$(\mathbb{R}; <, f)$ は局所順序極小となる.

問題

証明の方針:1.$\{<, f\}$ 論理式を量化記号消去に相当する操作

Example

端点をもたない稠密順序集合の量化記号消去を考えるとき, 例えば,

$$\phi(x_1, x_2) := \exists x_3 . x_1 < x_3 < x_2 \wedge x_3 \in (a, b) \tag{2}$$

の場合は,

$$x_1 < b \wedge a < x_2 \wedge x_1 < x_2 \tag{3}$$

が成り立てば, 稠密性より,x_3 として x_1 と x_2 の間の (a, b) の元を選ぶことで, $\phi(x_1, x_2)$ を導く. 逆も明らか.

問題

証明の方針:1.$\{<, f\}$ 論理式を量化記号消去に相当する操作

Example

例えば,

$$\phi(x_1, x_2) := \exists x_3 . x_1 < f^2(x_3) < x_3 < x_2 \wedge x_3 \in (a, b) \tag{4}$$

のような論理式を考えており, 量化消去される変数 x_3 が動くとき,

1. x_3 に f を有限回施したものも他の変数の動きを制限する.
2. $f^l(x_3), f^m(x_3)$ 同士も動きを制限しあう.

が問題となる. そのため,

1. $x_3, f(x_3), f^2(x_3)$ を $f^2(x_3)$ の動きで統制
2. $x_3, f(x_3), f^2(x_3)$ の間の order type が変わらない範囲に分割

問題

証明の方針:2. 標準的な論理式を定める.

定義.(標準的な論理式)

次の形の $L_{\infty\omega}-$ 論理式を (n,p)-standard formula という.

$$\bigvee_{\delta=<i_0^1,\ldots,i_n^3>,otp}(\bigwedge_{l,k} f^l(x_k) \in J_{i_l^k})$$
$$\wedge otp(x_1,,f^p(x_3)) \wedge x \in B$$

ただし otp は $(p+1)\cdot 3$ 変数の order type を表し,disjunction は order type 全体と自然数の $(n+1)\cdot 3$ 対全体を走る. また,B は (***) であり,δ, otp に依らない.

問題

証明の方針:2. 標準的な論理式を定める.

定義.(標準的な論理式)

次の形の $L_{\infty\omega}-$ 論理式を (n,p)-standard formula という.

$$\bigvee_{\delta=<i_0^1,\ldots,i_n^3>,otp}(\bigwedge_{l,k} f^l(x_k) \in J_{i_l^k})$$
$$\wedge otp(x_1,, f^p(x_3)) \wedge x \in B$$

ただし otp は $(p+1)\cdot 3$ 変数の order type を表し,disjunction は order type 全体と自然数の $(n+1)\cdot 3$ 対全体を走る. また,B は (***) であり,δ, otp に依らない.

例えば,$x_2, x_3 \in J_1$ の条件の下で,f が J_1 上で狭義単調増大なら

$$\mathbb{R} \models \forall x_2, x_3 \in J_1 \to (x_3 < x_2 \leftrightarrow f(x_3) < f(x_2). \qquad (5)$$

同様に $(\bigwedge_{l,k} f^l(x_k) \in J_{i_l^k})$ の条件から, 同値な $f^2(x_3)$ の式に帰着で

問題

証明の方針:2. 標準的な論理式を定める.

定義. (***)

$\mathbb{R}^m$ の部分集合 B が次を満たすとき locally boxy という.

- $B = \bigcup_i B_i; \{B_i\}$ family of boxes,
- $\forall a \in \mathbb{R}^m, \exists C$:open box s.t. $a \in C \wedge C \cap B$ is a box.

ただし, ここで box とは, 開区間及び一点集合の直積でかける集合で, open box とは開区間の直積でかける集合.

この定義で, 変数が一つの場合の standard formula は, 局所順序極小の条件を満たす定義可能集合となる. この量化記号をつけた standard formula の量化記号消去を,standard formula の範囲内で行う事を目指す.

今後の課題

局所順序極小性における自明性についての問題

1. 自明性から binarity は言えるか?
2. また binarity から, 群の翻訳不可能性が示せるか?
3. 局所的に,binarity と自明性の対応は存在しないか?

非自明な条件下での問題

1. nonbinarity を強極小構造もしくは単純構造下で考えたとき, 群の構成条件に一致するか?
2. nonbinarity と局所順序極小性から, よい正規翻訳曲線族が得られるか?
3. 単純構造下での, 群の構成定理の証明の類似が適応できる順序構造の条件は?

参考文献

1. B.Zil'ber, The structure of models of uncountably categorical theories,1984,PWN-North-Holland,vol.1, pp.359-368.
2. E.Hrushovski, A new strongly minimal set,1993,Annals of Pure and Applied Logic,vol.62(2) pp.147-166.
3. Y.Peterzil and S.Starchenko, A thrichotomy theorem for o-minimal structures, 1997,Proc. London Math. soc.,vol.77(3) pp.481-523.
4. C.Toffalori, K.Vozoris, Notes on local o-minimality, Math. Logic Quarterly, 55, pp.617-632
5. F.Maalouf, Construction d'un groupe dans les structures C-minimales, J. Symbolic Logic, vol.73(3)2008, pp.957-968.
6. I.Tomašić and F. O. Wagner, Applications of the group configuration theorem in simple theories, 2003, J. Math. Log.,vol.3 ,pp. 239-255.
7. A.Makler, M.Rubin and C.Steinhorn, Dedekind completeness and the algebraic complexity of o-minimal structures, Can. J. Math.,vol. 44(4),1992,pp.843-855.
8. Y.Peterzil, Constructing a group-interval in o-minimal structures,J. Pure and Applied

   Algebra,vol.94(1994)pp.85-100.